

Modélisation et Évaluation de Performances de Réseaux

Chapitre 5 : Réseaux de files d'attente (à forme produit) (maj : mars 03)

Fabrice Valois

fabrice.valois@insa-lyon.fr

[http://telecom.insa-lyon.fr/ ~ fvalois](http://telecom.insa-lyon.fr/~fvalois)

Agenda

- ' Introduction
- ' Réseaux monoclasses ouverts (Jackson)
- ' Réseaux monoclasses fermés (Gordon et Newel)

Introduction

- ' Réseaux de FA = ensemble de FA Interconnectés
 - ' Monoclasses : une seule classe de clients correspondant à une seule entité statistiquement indifférenciables
 - ' Ouverts
 - ' Fermés
 - ' Multiclasses :
 - ' Plusieurs classes de clients
 - ' Schéma de routage spécifique
 - ' Comportements différents au niveau de chaque station

⇒ Solution à *forme produit*



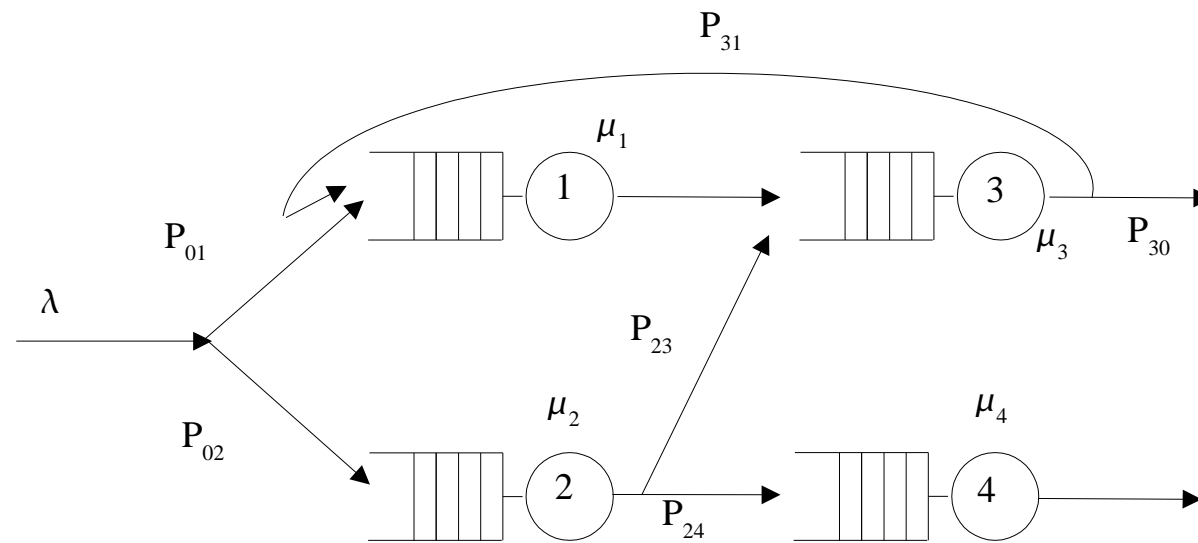
Réseaux monoclasses ouverts à forme produit

▪ Définition (réseau de Jackson)

- Une seule classe de clients
- Processus d'arrivées des clients dans le système est poissonien
- Un seul serveur à chaque station
- Capacité de stockage illimitée à toutes les stations
- Discipline de service de type FIFO
- Routages probabilistes



Exemple de réseaux de Jackson ouvert



Paramètres d'un réseau de Jackson

- ' Paramètres d'un réseau de Jackson ouvert :
 - ' M le nombre de stations
 - ' λ le taux d'arrivées dans le réseau
 - ' μ_i le taux de service de la station $i=1, \dots, M$
 - ' P_{0i} : probabilité qu'un client arrive dans le système et dans la FA_i, $i=1, \dots, M$
 - ' P_{ij} : probabilité d'aller de la station i vers la station j
 - ' P_{i0} : probabilité de quitter le système depuis la station i
- ' Bien sûr, on a
$$\sum_{j=0}^M p_{ij} = 1 \quad i=1, \dots, M$$



Stabilité d'un réseau de Jackson

- ' Condition de stabilité ?
 - ' Liée aux taux d'arrivées des clients dans le réseau
 - ' Aux services μ_i des stations
 - ' Cheminement des paquets !

- ⇒ il faut calculer la *charge induite* par un client à chacune des stations
 - ' E_i : *taux visite* de la station i ou *nombre moyen de passages* à la station i



Stabilité d'un réseau de Jackson (suite)

- Chaque client induit une charge moyenne de travail à la station i :
 - À chaque passage : $1/\mu_i$
 - Au total (ie en moyenne) : e_i/μ_i
- En posant $\lambda_i = e_i \lambda$ le taux d'arrivées à la station i

Condition de stabilité du système $\lambda_i < \mu_i$ $i=1, \dots, M$

Calcul des taux de visite e_i

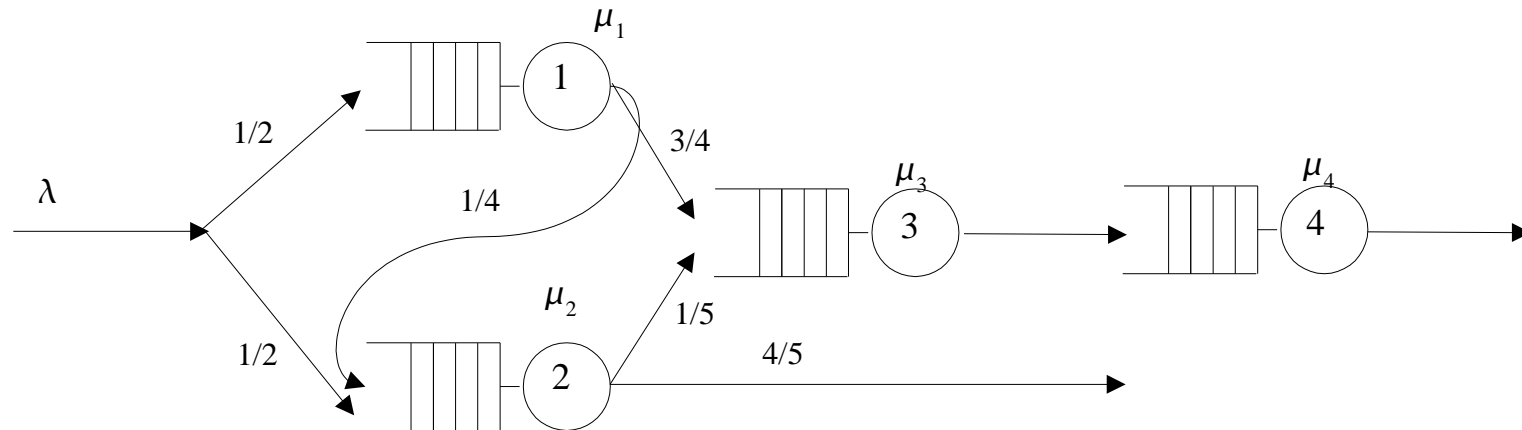
- λ_i : trafic à la station i .
- C'est à la fois le e débit moyen d'entrée et le débit moyen de sortie à la station i !
- Décomposition du trafic
 - Trafic venant de l'extérieur : λp_{0i}
 - Trafic venant de la station j : $\lambda_j p_{ji} \quad \forall j=1, \dots, M$

- Soit :
$$\lambda_i = \lambda p_{0i} + \sum_{j=1}^M \lambda_j p_{ji}$$

- Et finalement :
$$e_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^M e_j p_{ji}, \quad i=1, \dots, M$$



Exemple



On a immédiatement : $e_1 = \frac{1}{2}$ dont on tire : $e_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e_1 = \frac{5}{8}$

Finalement : $e_3 = \frac{3}{4}e_1 + \frac{1}{5}e_2 = \frac{1}{2}$ et $e_4 = e_3 = \frac{1}{2}$

Et pour les taux d'arrivées : $\lambda_1 = \frac{\lambda}{2}$, $\lambda_2 = \frac{5\lambda}{8}$, $\lambda_3 = \frac{\lambda}{2}$, $\lambda_4 = \frac{\lambda}{2}$

Et bien sûr : $\frac{4}{5}\lambda_2 + \lambda_4 = \lambda$ (égalité taux de sortie et taux d'entrée)

En pratique...

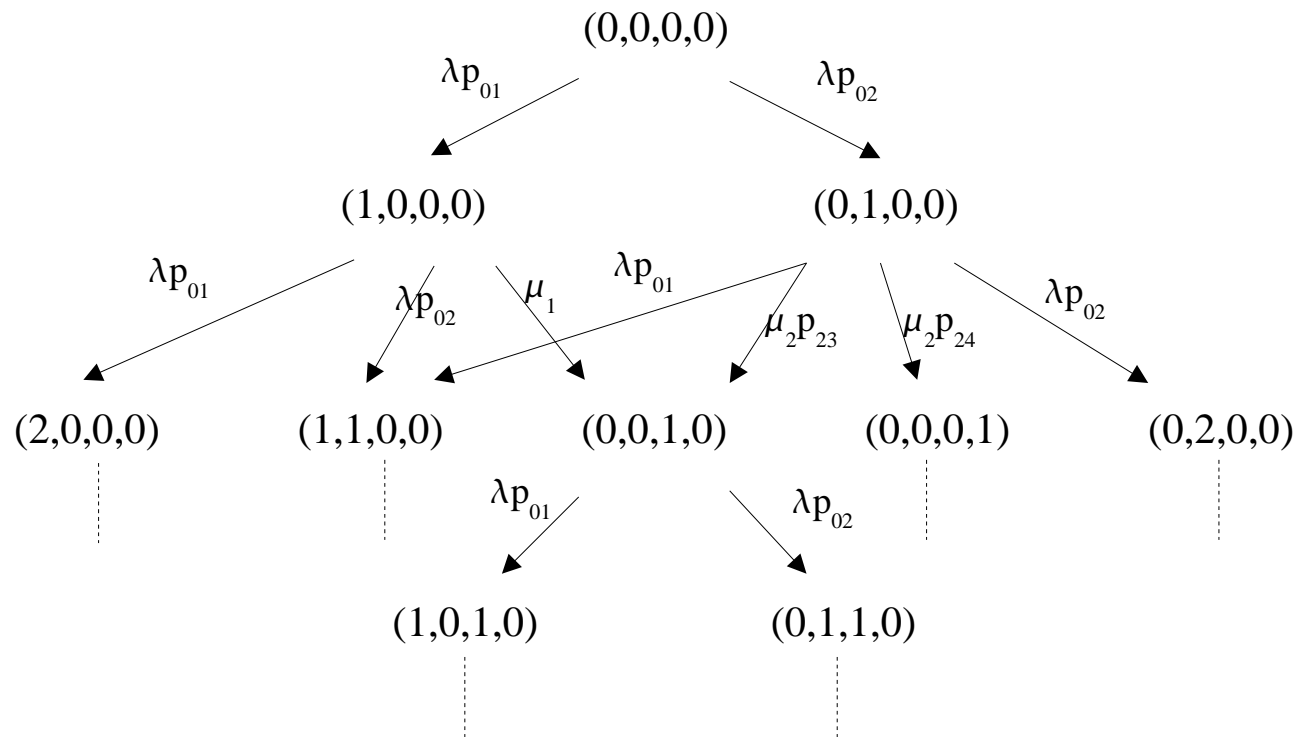
- On calcule les taux de visite e_i et l'on en déduit les taux d'arrivées aux différentes stations $\lambda_i = e_i \lambda$
- On vérifie la condition de stabilité du réseau $\lambda_i < \mu_i$
- Si la condition est satisfaite, on peut poursuivre l'étude sinon il faut modifier les paramètres du système

Régime permanent des réseaux de Jackson ?

- ' Démarche d'étude : trouver une bonne description d'état, ie tel que le processus stochastique engendré soit une CMTC.
- ' *Rappel* : pour la M/M/1, c'est $\{n(t)\}_{t \geq 0}$
- ' Ici : vecteur $\{\mathbf{n}(t) = (n_1(t), \dots, n_M(t))\}_{t \geq 0}$ où $n_i(t)$ est le nombre de clients dans la station i au temps t



CMTC associée à un réseau de FA



Équations d'équilibre d'un réseau de Jackson

$$p(n) \left[\lambda + \sum_{i=1}^M \sum_{n_i > 0} \mu_i p_{ij} \right] = \sum_{i=1}^M p(n - e_i) \lambda p_{0i} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M p(n - e_i + e_j) \mu_j p_{ji} + \sum_{j=1}^M p(n + e_j) \mu_j p_{j0}$$

où : $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

- ' Il *suffit* de résoudre ce système d'équations...!
- ' En fait, il existe une solution très simple...



Théorème de Jackson (admis)

Propriété : La probabilité stationnaire du réseau possède la **forme produit** suivante :

$$p(n) = \prod_{i=1}^M p_i(n_i)$$

où : $p_i(n_i)$ est la probabilité stationnaire d'une file M/M/1 ayant un taux d'arrivée λ_i et un taux de service μ_i

$$\text{Soit : } p_i(n_i) = (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i}$$

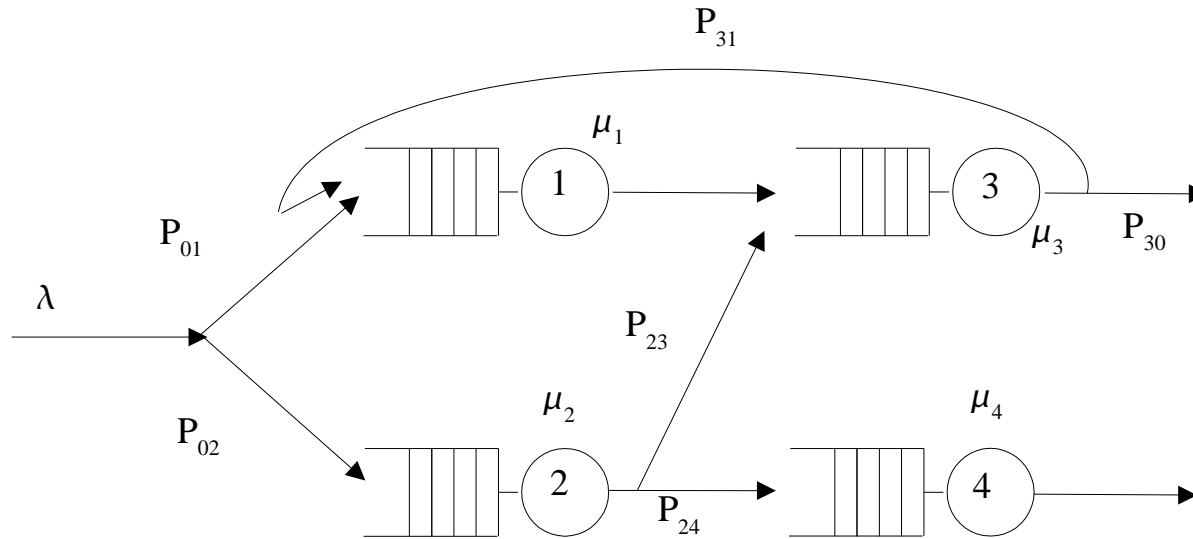
$$\text{Où : } \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

En clair ?

- ' Un réseau de Jackson est donc équivalent à un ensemble de files M/M/1 et la probabilité stationnaire $p(n)$ est égale au produit des probabilités marginales $p_i(n_i)$ de chacune de files étudiées en **isolation** (cf. slide suivant...)

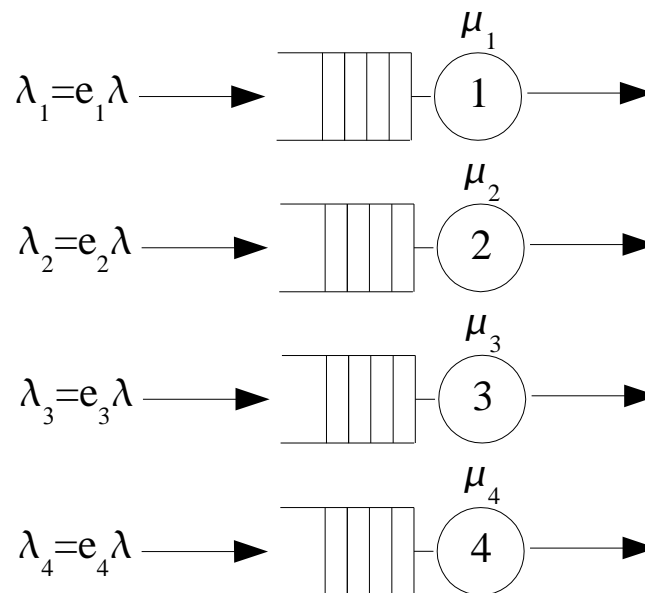


Illustration de l'équivalence d'un réseau de Jackson et d'un ensemble de files M/M/1



$$p(n_1, n_2, n_3, n_4)$$

=



$$P_1(n_1)$$

*

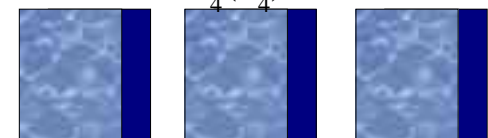
$$p_2(n_2)$$

*

$$p_3(n_3)$$

*

$$P_4(n_4)$$



Paramètres de performances

On peut calculer les paramètres de performances, débit moyen, nombre moyen de clients, temps moyen de réponse, soit pour chaque file soit pour l'ensemble du réseau !

	Station i	Réseau
Débit moyen	X_i	X
Nombre moyen de clients	Q_i	Q
Temps moyen de réponse	R_i	R

Paramètres de performances (fin)

- Les paramètres de performances de chaque station sont issus de la décomposition en files M/M/1 :

$$X_i = \lambda_i = e_i \lambda$$

$$Q_i = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} \quad \text{avec : } \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

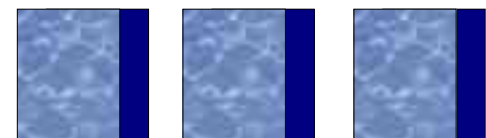
$$R_i = \frac{Q_i}{X_i} = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i}$$

- Les paramètres de performances du réseau sont alors :

$$X = \lambda$$

$$Q = \sum_{i=1}^M Q_i$$

$$R = \frac{Q}{X} = \frac{Q}{\lambda} = \sum_{i=1}^M \frac{Q_i}{\lambda} = \sum_{i=1}^M e_i \frac{Q_i}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^M e_i R_i$$



Extension au cas des multiserveurs

- Idem sauf que chaque station peut comporter plusieurs serveurs identiques (et indépendants les uns des autres).
 - C_i : nombre de serveurs de la station i
 - Chacun de ces serveurs suit une loi exponentielle de taux μ_i
- λ_i et e_i se calculent comme précédemment et

Condition de stabilité du système $\lambda_i < \mu_i$ $i=1, \dots, M$

Extension au cas des multiserveurs (fin)

- Propriété : la probabilité stationnaire du réseau possède la **forme produit** suivante :

$$p(n) = \prod_{i=1}^M p_i(n_i)$$

où : $p_i(n_i)$ est la probabilité stationnaire d'une file M/M/C ayant un taux d'arrivée $\lambda_i = e_i \lambda$ et un taux de service μ_i et comportant C_i serveurs

- L'analyse du réseau se réduit donc à l'analyse de M files simples qui sont ici des M/M/C.



Réseaux monoclasses fermés à forme produit

- ' Ici : les clients initialement dans le système circulent sans jamais sortir du réseau et sans qu'aucun client de l'extérieur n'y rentre.
- ' Définition (Jackson fermé / Gordon-Newell) :
 - ' Une seule classe de clients
 - ' Un seul serveur à chaque station
 - ' Un temps de service exponentiel à chaque station
 - ' Une capacité de stockage illimitée à toutes les stations
 - ' Des files FIFO
 - ' Des routages probabilistes.



Paramètres d'un réseau de Gordon-Newell

- ' M : nombre de stations
- ' N : nombre total de clients
- ' μ_i : le taux de service de la station i , $i=1, \dots, M$
- ' P_{ij} : probabilité de terminer son service à la station i pour se rendre à la station j , avec :

$$\sum_{j=0}^M p_{ij} = 1 \quad i=1, \dots, M$$



Stabilité d'un réseau de Gordon-Newell

- ' Remarque : dans un réseau fermé, il n'y a pas de problème de stabilité puisque le nombre de clients à chaque station est limitée à la population du réseau (qui ne peut donc croître à l'infini)...
- ' Effectivement, pour toute station i : $n_i(t) < N, \forall t$
- ' Seule *contrainte* : $\sum_{i=1}^M n_i(t) = N$ en permanence respectée



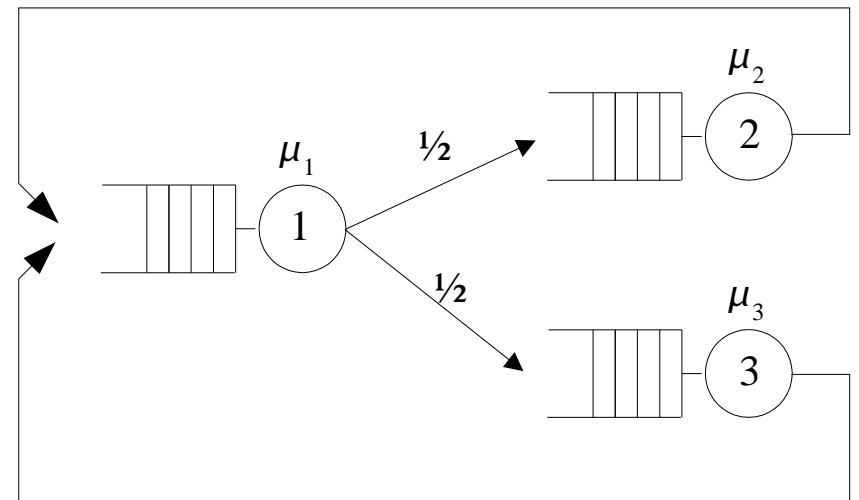
Calcul des taux de visite e_i

- Attention : dans un réseau fermé, le nombre **absolu** de fois qu'un client passe par chaque station est infini !
 - ⇒ on va s'intéresser au nombre **relatif** de passage à une station i entre deux passages par une station de référence ;
 - E_i : *taux de visite* de la station i ou *nombre moyen de passage* à la station i entre deux passages par une station de référence (ie : une station j telle que, par convention: $e_j=1$)
- Les e_i sont solutions du système d'équations :

$$e_i = \sum_{j=1}^M e_j p_{ji}, \quad i=1, \dots, M$$



Exemple



Ici, le calcul des e_i donne : $\frac{1}{2} e_1 = e_2 = e_3$

Pour lever l'indétermination, on va choisir la station 1 comme station référence et poser : $e_1 = 1$ d'où : $e_2 = e_3 = \frac{1}{2}$

Entre 2 passages à la station 1, un client passe bien, en moyenne, 0.5 fois par la station 2.

Remarque : si nous avons choisi la station 2 comme station référence, on obtient alors : $e_1 = 2$. En clair, entre 2 passages consécutifs à la station 2 un client passe bien, en moyenne, 2 fois par la station 1.



Analyse du régime permanent

- ' Comme pour les réseaux de Jackson, on va chercher une bonne description d'état, ie tel que le processus stochastique engendré soit une CMTC.
- ' Ici : vecteur $\{\mathbf{n}(t)=(n_1(t), \dots, n_M(t))\}_{t \geq 0}$ où $n_i(t)$ est le nombre de clients dans la station i au temps t
- ' On peut donc construire une CMTC...



Équations d'équilibre d'un réseau de G-N

$$p(\mathbf{n}) \left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i p_{ij} \right] = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M p(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) \mu_j p_{ji}$$

$$\text{Pour tout } \mathbf{n} \in E(M, N) = \left\{ \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_M) \mid \sum_{i=1}^M n_i = N \right\}$$

Encore une fois, on peut dire :

- Il *suffit* de résoudre ce système d'équations...!
- Mais en fait, il existe une solution très simple...



Théorème de Gordon-Newell (admis)

Propriété : La probabilité stationnaire du réseau possède la **forme produit** suivante :

$$p(n) = \frac{1}{G(M, N)} \prod_{i=1}^M f_i(n_i)$$

$$\text{Où : } f_i(n_i) = \left(\frac{e_i}{\mu_i} \right)^{n_i}$$

Et : $G(M, N)$ est une constante de normalisation

La difficulté ici, c'est le calcul de $G(M, N)$!

Paramètres de performances et algorithme de convolution

- Bien entendu, il est possible de calculer les paramètres de performances soit par station soit pour l'ensemble du réseau et on peut écrire :

$$U_i = 1 - p_i(0)$$

$$X_i = \sum_{k=1}^N p_i(k) \mu_i = (1 - p_i(0)) \mu_i$$

$$Q_i = \sum_{k=1}^N k p_i(k)$$

$$R_i = \frac{Q_i}{X_i}$$

- Mais.... connaissance de $p_i(k)$?

