Modélisation et évaluation de performances de réseaux

Chapitre 4 : Quelques files simples

(MAJ : Mars 03)

Fabrice Valois
fabrice.valois@insa-lyon.fr
http://telecom.insa-lyon.fr/ ~ fvalois

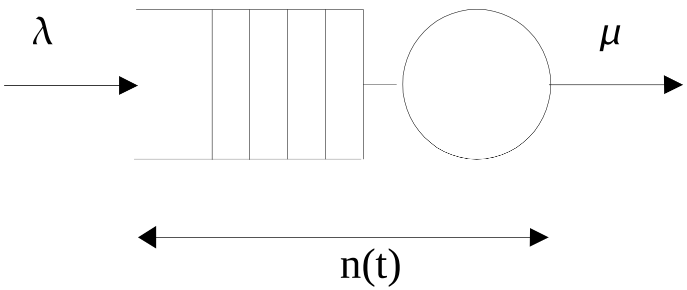
Introduction

- Tout ou presque sur la M/M/1
- Un peu de travail sur la M/M/∞
- Une file avec blocage : la file M/M/1/K
- Modélisation d'un commutateur M/M/C/C (à l'ancienne)
- Limites des lois markoviennes

Étude de la file M/M/1

- Définition
- CMTC associée
- Stabilité
- Analyse du régime permanent
- Calcul des paramètres de performances
  - Débit X
  - Taux d'utilisation du serveur U
  - Nombre moyen de clients Q
  - Temps moyen de séjour R

Définition de la M/M/1



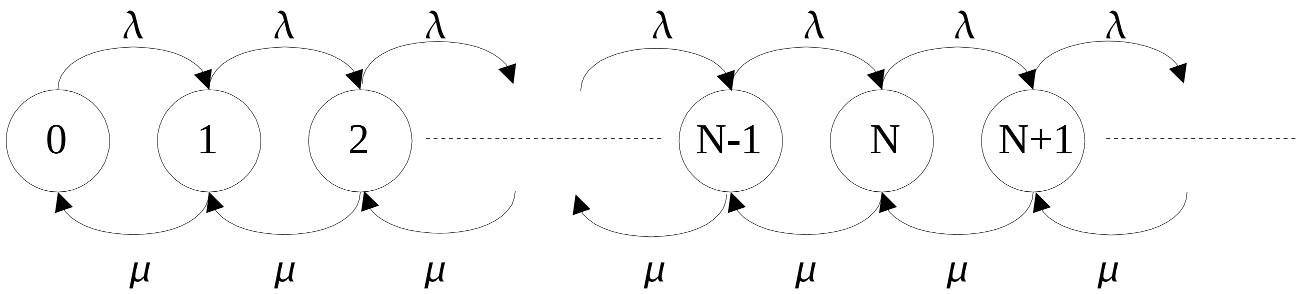
- M/M/1 ?
  - Processus d'arrivée des clients dans la file : Poisson (λ)
  - Temps de service d'un client : distribution exponentielle (μ)
  - File de capacité infinie
  - Serveur unique
  - Discipline de service de la file : FIFO

CMTC associée à la M/M/1

- Description : processus $\{n(t)\}_{t \geq 0}$: stochastique, espace d'états discrets, temps continu, sans mémoire

$\Rightarrow$ c'est bien une CMTC !

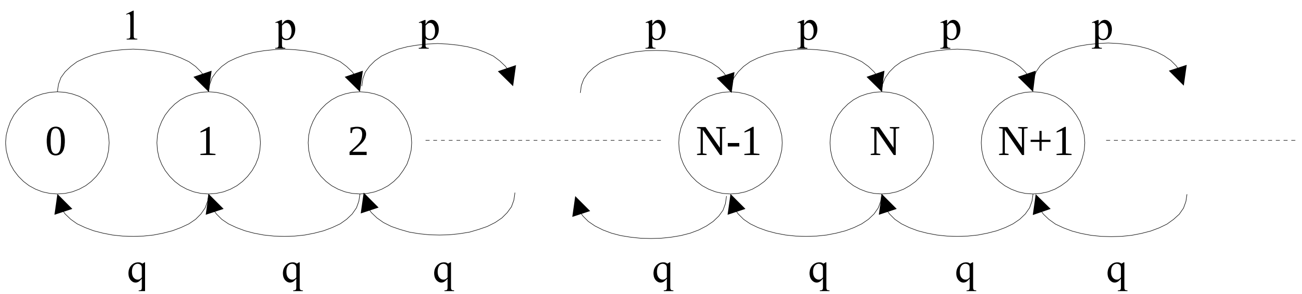
- Graphe associé



Stabilité d'une M/M/1 ?

- Construction de la CMTD incluse avec :

$$p=\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \quad et \quad q=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$



CMTD incluse dans la CMTC de la file M/M/1

Stabilité de la M/M/1 ?

- Étude de la CMTD incluse :
  - p>q, ie $\lambda > \mu$, tous les états sont transitoires
  - p=q, ie $\lambda = \mu$, tous les états sont récurrents nuls
  - p<q, ie $\lambda < \mu$, tous les états sont récurrents non nuls

- Donc :
  - $\lambda \geqslant \mu \Rightarrow$ états transitoires ou récurrents nuls $\Rightarrow \forall n,\ p(n)=0$
  - $\lambda < \mu \Rightarrow$ états récurrents non nuls $\Rightarrow \forall n,\ p(n) \neq 0$

Analyse du régime permanent de la M/M/1

- Analyse stationnaire d'une file stable ($\lambda<\mu$)
- p(n) = probabilité stationnaire d'être dans l'état n

- Comment calculer ?
  - Système d'équations linéaires
  - Équations de balances locales
  - Équations aux frontières

Régime permanent
1. Système d'équations linéaires

- Rappel : avec les *bonnes* conditions, p(n) est solution de :

$$\boldsymbol{p}Q=0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} p(n)=1$$

où $\boldsymbol{p}=[p(0), p(1),\ldots]$ est le vecteur des probabilités stationnaires
où Q est le générateur infinitésimal de la CMTC :

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \ldots & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \ldots & \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \ldots \\ \vdots & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ & \vdots & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ & & \vdots & 0 & \mu & \ddots \end{pmatrix}$$

Régime permanent
2. Balances locales

- Équations d'états à l'équilibre :

$\boxed{\textit{Pour tout état } j\textit{, flux sortant de } j = \textit{flux entrant dans } j}$

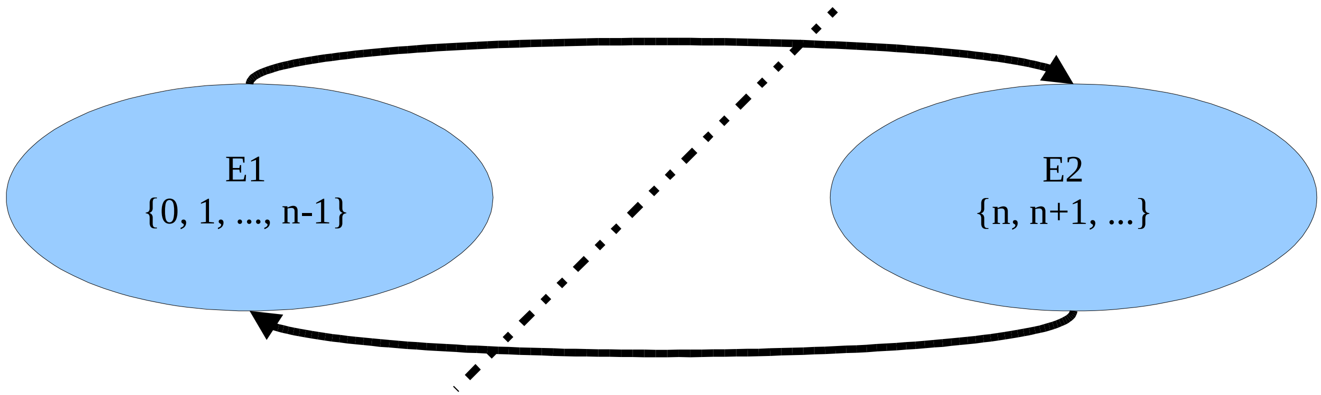
$$
\begin{aligned}
&p(0)\lambda = p(1)\mu \\
&p(1)(\lambda+\mu) = p(0)\lambda + p(2)\mu \\
&\vdots \\
&p(n)(\lambda+\mu) = p(n-1)\lambda + p(n+1)\mu, \ \forall n \geqslant 1
\end{aligned}
$$

Quelques lignes de calcul plus loin ⇒ *balances locales*

$$
\begin{aligned}
&p(0)\lambda = p(1)\mu \\
&p(1)\lambda = p(2)\mu \\
&\vdots \\
&p(n)\lambda = p(n+1)\mu, \ \forall n \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Régime permanent
3. Équations aux frontières

- Décomposition en deux sous-systèmes E1 et E2 dont on égalise les flux



$$p(n-1)\lambda = p(n)\mu \quad \forall n \geq 1$$

Régime permanent de la M/M/1

- En notant : $\varrho = \frac{\lambda}{\mu}$ on a alors $p(n) = \varrho\, p(n-1), \forall n \geqslant 1$

  $p(n) = \varrho^n p(0), \forall n \geqslant 0$

- Calcul de la constante de normalisation : $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = 1$

- Soit : $p(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n} = 1 - \varrho$

- On obtient alors : $p(n) = (1-\varrho)\varrho^n, \forall n \geqslant 0$

Paramètres de performances
Débit X

- Débit X ?

Un service est effectué avec un taux μ si le système contient au moins un client :

$$X = \text{Proba}\{\text{file non vide}\}\,\mu = \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\,\mu = [1 - p(0)]\,\mu = \varrho\,\mu = \lambda$$

Paramètres de performances
Taux d'utilisation du serveur U

- Taux d'utilisation ? C'est la probabilité que le serveur de la file soit occupé :

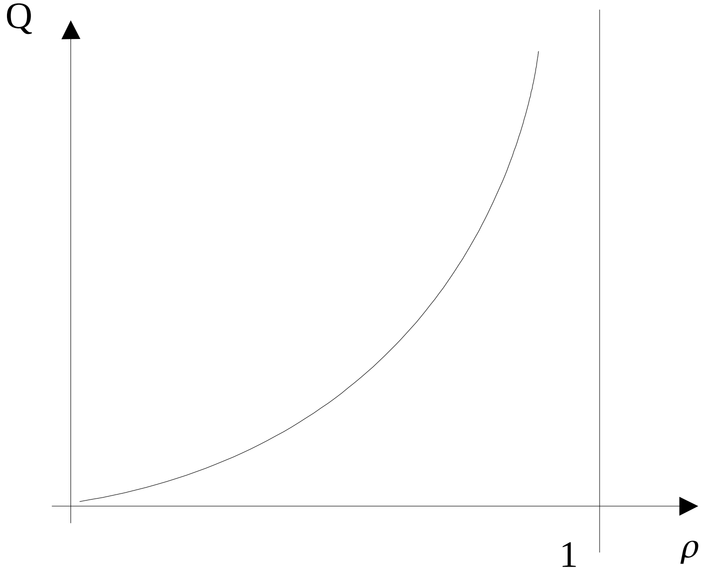
$$U = \sum_{n=1}^{\infty} p(n) = [1 - p(0)] = \varrho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Paramètres de performances
Nombre moyen de clients Q

- Nombre moyen de clients = espérance du nombre de clients :

$$Q=\sum_{n=1}^{\infty} n\,p(n)=(1-\varrho)\sum_{n=1}^{\infty} n\,\varrho^{n}=\varrho(1-\varrho)\sum_{n=1}^{\infty} n\,\varrho^{(n-1)}=\frac{\varrho(1-\varrho)}{(1-\varrho)^{2}}$$

$$Q=\frac{\varrho}{1-\varrho}$$

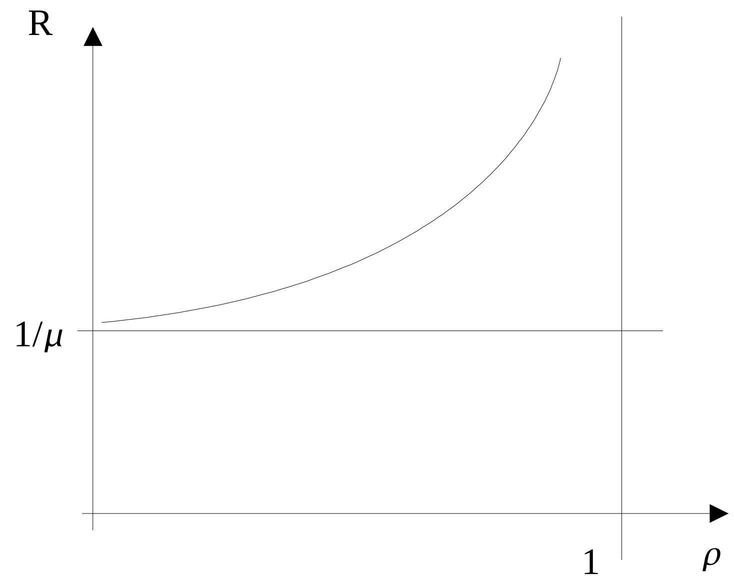


Paramètres de performances
Temps moyen de séjour R

- Utilisation de la loi de Little:

$$R=\frac{Q}{X}=\frac{1}{\mu(1-\varrho)}$$

- Se qui s'écrit : $R=\frac{1}{\mu}+\frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)}$

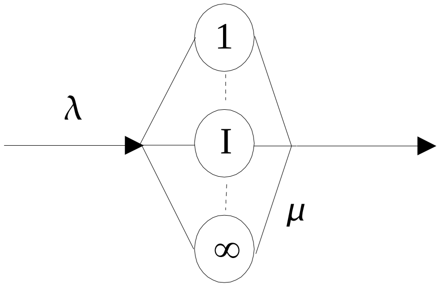


Étude de la M/M/∞

- Définition
- CMTC associée
- Stabilité
- Analyse du régime permanent
- Calcul des paramètres de performances
  - Débit X
  - Taux d'utilisation du serveur U
  - Nombre moyen de clients Q
  - Temps moyen de séjour R

Définition de la M/M/∞

- M/M/∞ ?
  - Processus d'arrivée des clients dans la file : Poisson (λ)
  - Temps de service d'un client : distribution exponentielle (μ)
  - Nombre illimité de serveurs identiques et indépendants les uns des autres

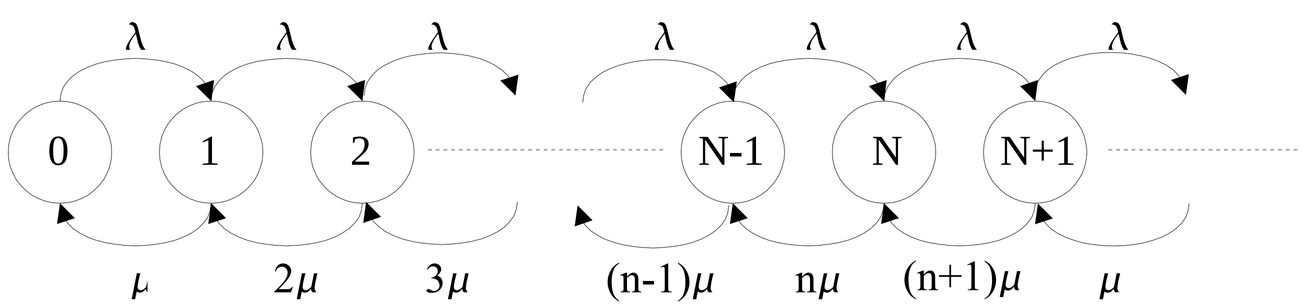


CMTC associée à la M/M/∞

- A nouveau, description d'état la plus simple : $\{n(t)\}_{t\geq 0} \Rightarrow$ stochastique, espace d'états discrets, temps continu, sans mémoire

$\Rightarrow$ c'est bien une CMTC !

- Graphe associé



Explication des taux nμ ?!

- Lorsqu'il y a **n** clients dans la file, le taux de transition de l'état n vers l'état n-1 est : **n**μ ?
  - $\mathcal{P}$= proba(n → n-1 en dt) ?
    - Un des n clients termine son service (le 1er, le 2ème, ..., le nème)
    - Aucun client n'arrive pendant dt !
  - Or :
    - proba(client termine son service, expo(μ)) = μdt+o(dt)
    - proba(client ne termine pas son service, expo(μ)) = 1-μdt+o(dt)
    - proba(aucun client n'arrive, poisson(λ)) = 1-λdt+o(dt)
  - $\mathcal{P}= \; p_{n\,n-1}(dt)=\left(\sum_{j=1}^{n}(\mu\,dt+o(dt))(1-\mu\,dt+o(dt))^{n-1}\right)(1-\lambda\,dt+o(dt))$
  - Développement limité du 1er ordre : $\mathcal{P}= \quad p_{n\,n-1}(dt)=n\,\mu\,dt+o(dt)$

Stabilité de la M/M/∞

- Rappel : condition de stabilité d'une file M/M/1 ?
  le nombre moyen de client arrivant dans la file par unité de temps doit être inférieur à la capacité de traitement de la file
- Serveur infini ?
  Tout nouveau client se présentant à l'entrée de la file est immédiatement traité
- ⇒ Une file M/M/∞ est toujours stable !

Analyse du régime permanent M/M/∞ équations aux frontières

$$p(n-1)\lambda = p(n)n\mu\,,\ \forall n \geqslant 1$$

soit $p(n) = \dfrac{\varrho}{n}\, p(n-1),\ \forall n \geqslant 1$ où $\varrho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

et : $p(n) = \dfrac{\varrho^n}{n!}\, p(0),\ \forall n \geqslant 1$

Condition de normalisation : $p(0) = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n!}} = e^{-\varrho}$

Et finalement : $p(n) = \dfrac{\varrho^n}{n!}\, e^{-\varrho}\ \forall n \geqslant 1$

Paramètres de performances de la M/M/∞
Débit X

- Le service s'effectue avec un taux nμ dans chaque état lorsque le système contient n clients :

$$X=\sum_{n=1}^{\infty} p(n)n\mu=e^{-\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varrho^{n}}{(n-1)!}=e^{-\varrho}\varrho e^{\varrho}\mu=\varrho\mu=\lambda$$

Paramètres de performances de la M/M/∞
Nombre moyen de clients Q

$$Q=\sum_{n=1}^{\infty} np(n)=e^{-\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varrho^{n}}{(n-1)!}=e^{-\varrho}\varrho\, e^{\varrho}=\varrho$$

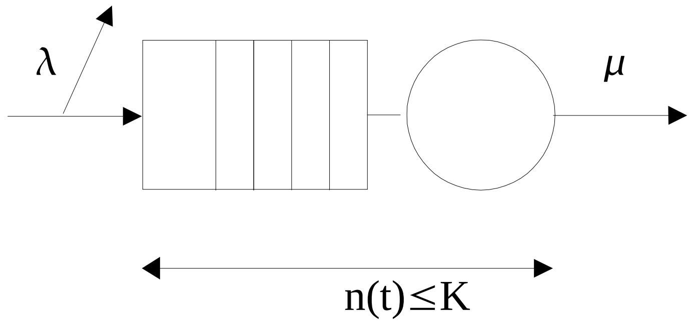
Paramètres de performances de la M/M/∞
Temps moyen de séjour R

- Utilisation de la loi de Little

$$R = \frac{Q}{X} = \frac{\varrho}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

Une file avec blocage :
la file M/M/1/K

- C'est un file identique à la file M/M/1 mais la capacité de la file d'attente est finie.
  - Si un client arrive (suivant une loi de Poisson de taux λ) et qu'il y a déjà K clients présents dans le système, il est **perdu** !

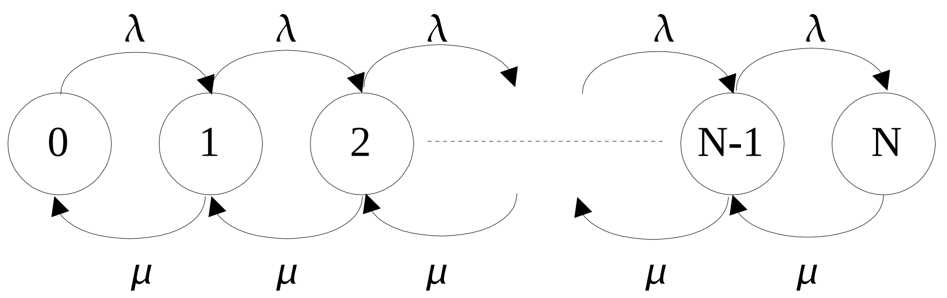


CMTC associée à la file M/M/1/K

- Description : processus $\{n(t)\}_{t\geq 0}$ représentant le nombre de clients dans le système : stochastique, espace d'états discrets (et fini), temps continu, sans mémoire

$\Rightarrow$ c'est bien une CMTC !

- Graphe associé :



Stabilité d'une file M/M/1K

- CMTC : irréductible et, comme l'espace d'état est fini, tous les états sont récurrents non nuls
  - Il n'y a donc pas de condition de stabilité pour la file M/M/1/K

Analyse du régime permanent de la M/M/1/K

- Soit p(n) la probabilité d'être dans l'état n.
- Équations aux frontières

$\Rightarrow$ $$p(n-1)\lambda = p(n)\mu \quad \text{pour n = 1, ..., K}$$

Soit : $p(n) = \rho\, p(n-1)$ pour n = 1, ..., K où : $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

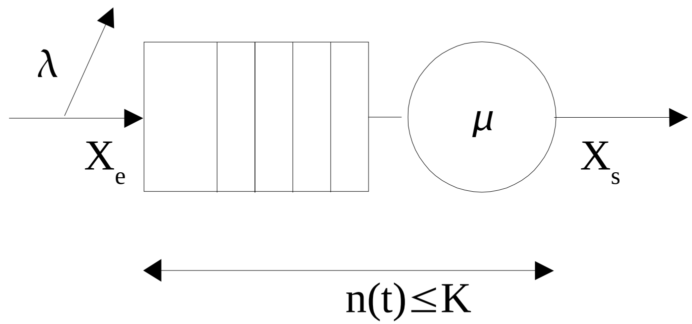
Et finalement : $p(n) = \rho^n p(0)$ pour n = 0, ..., K

En utilisant la condition de normalisation, on peut déduire p(0) :

$$p(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K} \rho^n} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

Ce qui permet d'écrire finalement : $p(n) = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^n$ pour n=0, ..., K

Paramètres de performances
Débit X



- Calcul du débit moyen
  - Mesurer le taux de départ des clients en sortie du serveur : X_s
  - Mesurant le taux d'arrivée **effectif** des clients acceptés dans le système : X_e

Paramètres de performances
Débit X (fin)

- $X_s = \mu$ dès l'instant où la file n'est pas vide :

$$X_s = \text{Proba}\{\text{file non vide}\}\,\mu = \sum_{k=1}^{K} p(n)\mu = [1 - p(0)]\mu = \frac{\rho - \rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}}\mu$$

- $X_e = \lambda$ dès l'instant qu'un client arrive lorsque la file n'est pas pleine :

$$X_e = \sum_{n=0}^{K-1} p(n)\lambda = [1 - p(K)]\lambda = \frac{1 - \rho^{K}}{1 - \rho^{K+1}}\lambda$$

- Finalement, comme $\rho = \lambda/\mu$: $X_e = X_s = X$

Paramètres de performances
Taux d'utilisation du serveur U

$$U=\sum_{n=1}^{K} p(n)=1-p(0)=\frac{\rho-\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}=\rho\frac{1-\rho^{K}}{1-\rho^{K+1}}$$

- Dans le cas d'une file à capacité limitée, le taux d'utilisation n'est plus égal à ρ !
- Nous avons toujours : U = X/μ mais ici X$\neq\lambda$

Paramètres de performances
Nombre moyen de clients Q

$$Q = \sum_{n=0}^{K} np(n) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \sum_{n=0}^{K} n\rho^{n} = \frac{\rho(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} \frac{1-(K+1)\rho^{K}+K\rho^{K+1}}{(1-\rho)^{2}}$$

$$Q = \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1-(K+1)\rho^{K}+K\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$$

Paramètres de performances
Temps moyen de séjour R

- Quel temps de séjour ?
  - Temps moyen de séjour d'un client arrivant dans le système R_T
  - Temps moyen de séjour d'un client effectivement admis dans la file d'attent R.
- Calcul ? Application de la loi de Little !

Paramètres de performances
Temps moyen de séjour R (suite)

- En ne considérant que les clients effectivement admis :

$$R = \frac{Q}{X}$$

- En considérant tous les clients, y compris les rejetés :

$$R_T = \frac{Q}{\lambda}$$

- Soit α la proportion de clients admis dans le système :

$$\alpha = \frac{X}{\lambda}$$

- Finalement : $R_T = \alpha R + (1-\alpha) 0 = \dfrac{X}{\lambda} R$

Limite des lois markoviennes

- Les lois de service et d'arrivée sont de mauvaises approximations de
  - Lois fortement déterministes
  - Lois fortement indéterministes
- L'hypothèse des arrivées et des services individuels exclut :
  - Les arrivées groupées
  - Les services groupés

Recherche de lois plus générales

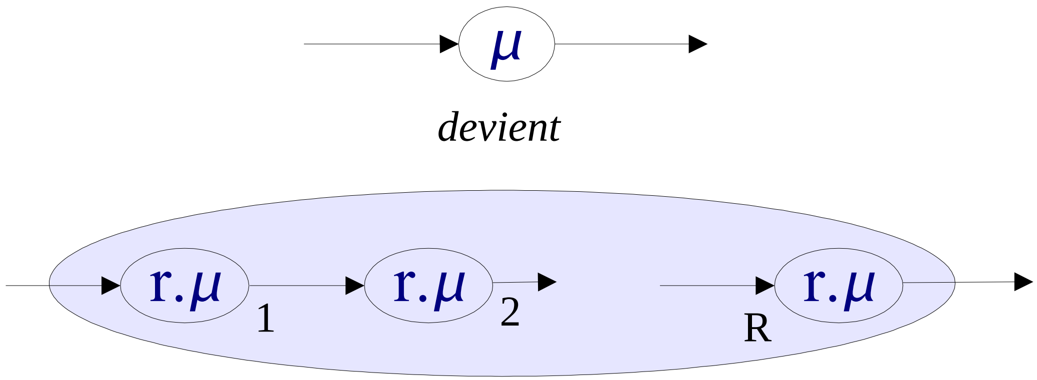
- Les files à loi d'arrivées et loi de service markoviennes ont pour comportement un processus de naissance et de mort...
- Quelles lois pour comportement de chaînes de Markov quelconques ??
  - Intérêt : couvrir une large gamme de lois et être une bonne approximation des autres....
  - Inconvénient : trouver au cas par cas la résolution de la chaîne de Markov !

On a trouvé ! (des lois plus générales...)

- Quelques extensions :
  - Erlang ou comment rendre **plus** déterministe les lois markoviennes
  - Markoviennes à arrivées multiples
  - Hyperexponentielles ou comment rendre **moins** déterministe les lois markoviennes
  - Cox : généralisation des lois Erlang et Hyperexponentielles

Distribution d'Erlang

- Comment rendre plus déterministe les lois markoviennes ?
- Idée :
  - Répéter la même expérience de manière indépendante rapproche la loi de son espérance
  - Un service de taux μ est remplacé par r services de taux r.μ



  - Attention : un seul serveur, donc un seul client servi !

Distribution Hyperexponentielle

- Comment rendre moins déterministe les lois markoviennes ?
- Idée :
  - Choix probabiliste entre serveurs hétérogènes
  - Un service de taux μ est remplacé par des services de taux μ_i, chacun pouvant être choisi avec une probabilité α_i avec $\sum \alpha_i/\mu_i = 1/\mu$