Modélisation et Évaluation de Performances de Réseaux

Département Télécommunications

Cours 4TC

Fabrice Valois
fabrice.valois@insa-lyon.fr
http://fvalois.insa-lyon.fr/

Plan du cours

- Motivations
- Processus markoviens
- Files d'attente :
  - Définitions, formalisme
  - Performances
  - Quelques files simples
- Réseaux de files d'attente (à forme produit)
- Réseaux de Petri (ibl)

Modalités

- Cours (fva & ibl), TD, TP (sous OPNET Modeler)
- Note finale = 0.75*DS + 0.25*CC

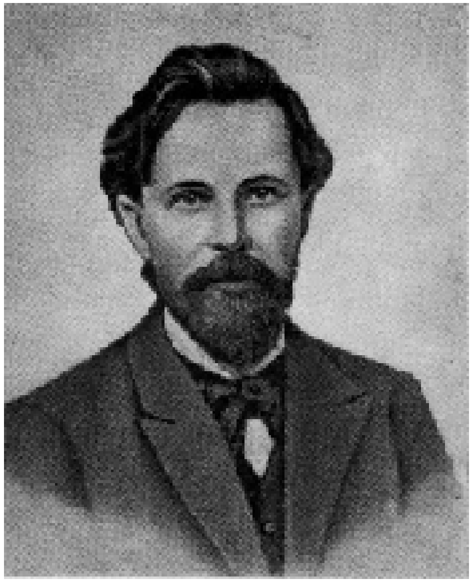
Bibliographie conseillée

- **B. Baynat, *Théorie des files d'attente*, Ed. Hermès 2000**
- **J.R. Norris, Markov Chains, Cambridge University Press, 1996**
- **R. Jain, *The art of Computer Systems Performance Analysis – Techniques for Experimental Design, Measurement, Simulation and Modeling*,** Ed. Wiley 1991
- A. Kershenbaum, *Telecommunications Network, Design, Algorithms*, Mc Graw-Hill 1993
- M. Schwartz, *Computer Communication Network : Design and Analysis*, Prentice-Hall 1977
- L. Kleinrock, *Communication Nets : stochastic message flow and delay*, Mc Graw-Hill 1964

Modélisation et Évaluation de performances de réseaux

Chapitre 1 : Processus Markoviens

(maj : jan 06)



Fabrice Valois
fabrice.valois@insa-lyon.fr
http://fvalois.insa-lyon.fr/

Agenda

- **Pré-requis**
- Chaînes de Markov à temps discret
- .... et à temps continu
- Processus de Naissance et de Mort

Préliminaire

- Probabilités (Bayes, thm des probabilités totales, etc.)
- Espérance
- Variance
- Loi exponentielle
- Processus de Poisson et processus *sans mémoire*
- Processus stochastique

Processus stochastique ?

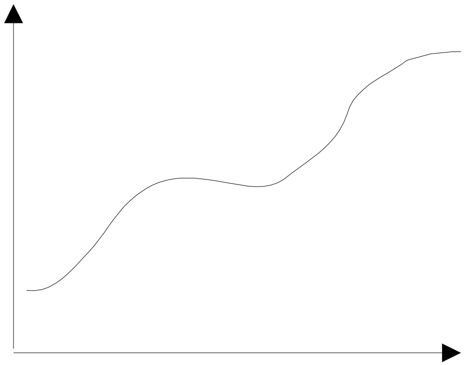
Définition : *Un processus stochastique $\{X(t)\}_{t \in T}$ est une fonction du temps dont la valeur à chaque instant dépend de l'issue d'une expérience aléatoire.*

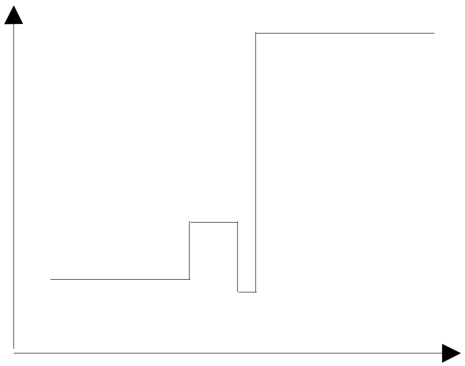
- Un processus stochastique est donc une famille de variables aléatoires (non indépendantes)
  - Le temps T, peut être discret ou continu
  - L'ensemble E des valeurs que peut prendre X(t) est appelé *espace d'états* et peut être discret ou continu

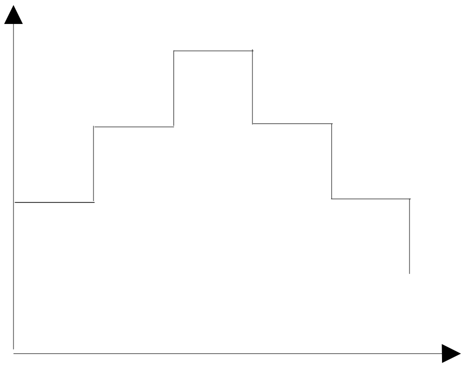
⇒ le processus de Poisson est un processus stochastique

Espace d'états discret/continu
Temps discret/Continu

- Une **trajectoire** d'un processus est décrit par un couple (espace, temps)
  - L'espace peut être discret (ED) ou continu (EC)
  - Le temps peut être discret (TD – top d'horloge), continu (TC – écoulement du temps), temps continu où les évolutions n'ont lieu qu'à des instants discrets (EvD)







Ex/Ty : Quelques exemples

- EC/TC : réaction chimique ou le mouvement de particules en interaction
- EC/TD : modèle journalier de remplissage d'un barrage
- ED/TC : le nombre de particules au cours d'une réaction chimique
- ED/EvD : nombre de clients dans une file d'attente
- ED/TD : le gain d'un joueur à chaque étape

Agenda

- Pré-requis
- **Chaînes de Markov à temps discret**
- .... et à temps continu
- Processus de Naissance et de Mort

Ce que l'on va apprendre

- Le formalisme en temps discret : chaînes de Markov
- Et sa version en temps continu
- Utilisations

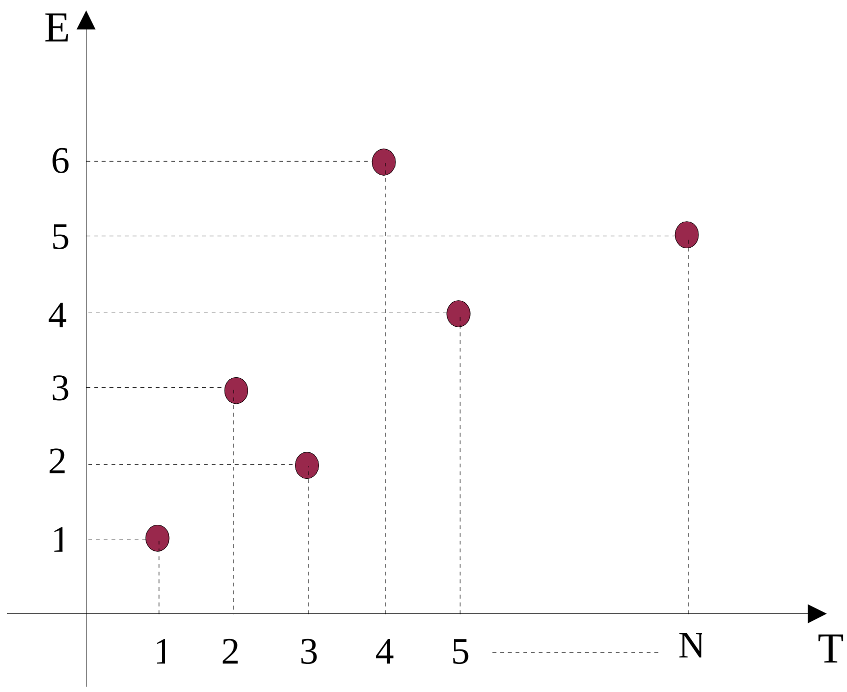
⇒ Outils simples de modélisation

⇒ Nécessaires pour la théorie des files d'attente

CMTD *ou...*
Les Chaînes de Markov à Temps Discret !

Soit un processus stochastique $\{X_n\}_{n \in N}$ à temps **discret** et espace d'états discret...

E peut-être fini ou infini (mais dénombrable)



*Processus stochastique à espace d'états discrets et temps **discret***

Définition de $\{X_n\}_{n\in N}$

- *Définition*

$\{X_n\}_{n\in N}$ est une CMTD ssi :

$$P[X_n=j \,/\, X_{n-1}=i_{n-1}, X_{n-2}=i_{n-2}, \ldots , X_0=i_0] = P[X_n=j \,/\, X_{n-1}=i_{n-1}]$$

i.e. C'est un processus sans mémoire ! De plus :

$$P[X_n=j, X_{n-1}=i_{n-1}, X_{n-2}=i_{n-2}, \ldots , X_0=i_0] = p_{i_0}^{(0)}.p_{i_0 i_1}.p_{i_1 i_2}\ldots p_{i_{n-1} i_n}$$

- *Restriction*

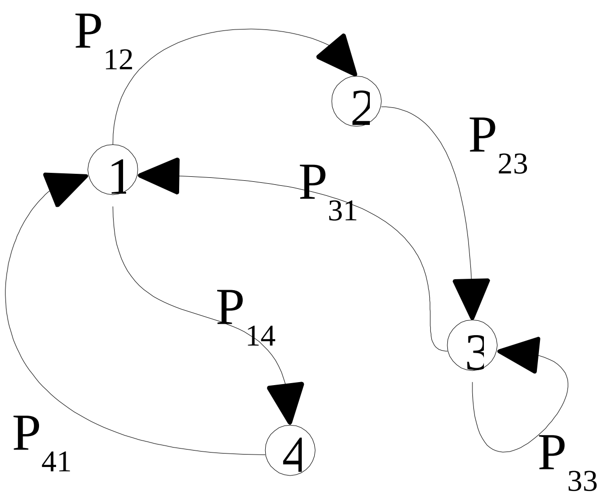
On ne considère que les CMTD *homogène, ie tq :*

$$p_{ij} = P[X_n=j \,/\, X_{n-1}=i] \;\forall\, n \in N$$

rq : on vérifie toujours : $\sum_{j\in E} p_{ij}=1$

Représentation

- CMTD = Graphe orienté



$$E=\{1,2,3,4\}$$

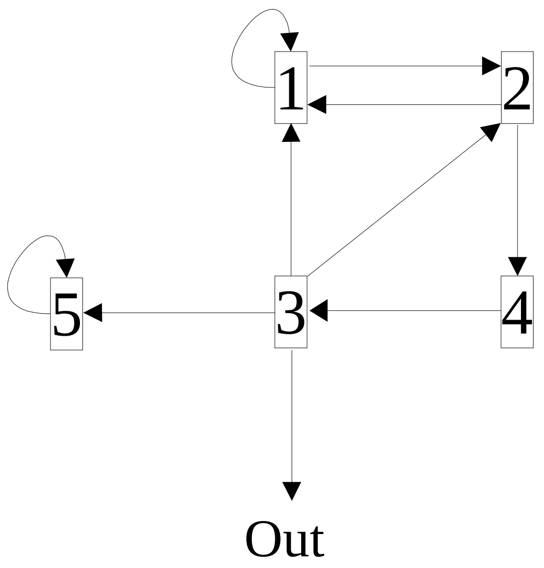
$$\begin{cases} p_{23}=p_{41}=1 \\ p_{12}+p_{14}=1 \\ p_{33}+p_{31}=1 \end{cases}$$

- Matrice transition

$$P = [p_{ij}]_{i,\,j\in E}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & 0 & p_{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_{31} & 0 & p_{33} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jouons à la souris (1)

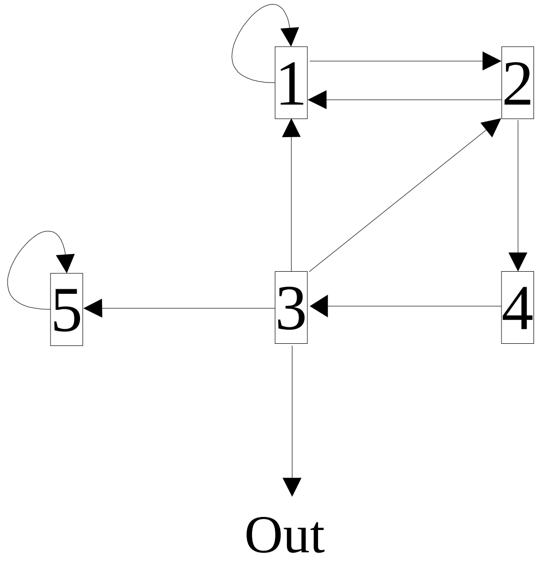


2 hypothèses :

1) souris amnésique

2) déplacement aléatoire (choix couloir équiprobable)

Jouons à la souris (1)



2 hypothèses :

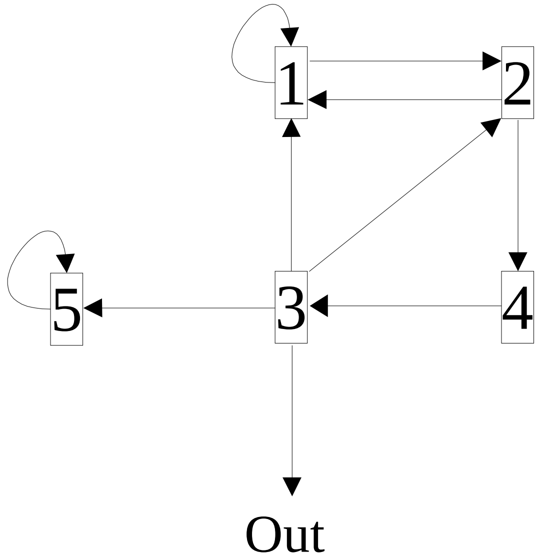
1) souris amnésique

2) déplacement aléatoire (choix couloir équiprobable)

Processus de modélisation

- 1 état pour modéliser la sortie
- 1 pièce = 1 état de la CMTD
- 1 couloir = 1 transition entre état
- choix aléatoire d'un couloir = valuation des transitions par des probabilités

Jouons à la souris (1)

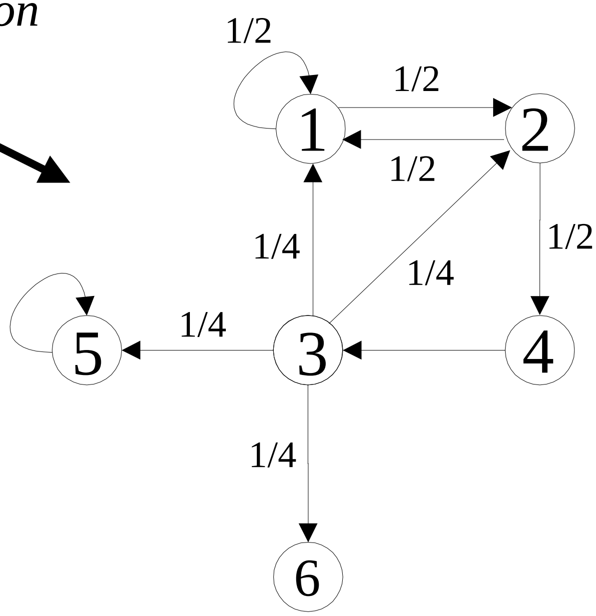


2 hypothèses :

1) souris amnésique

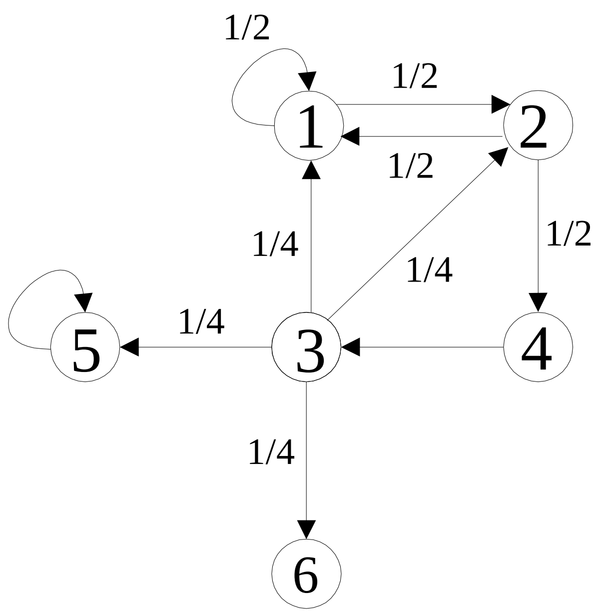
2) déplacement aléatoire (choix couloir équiprobable)

Processus de modélisation



CMTD homogène

Jouons à la souris (1)



Modèle de déplacement de la souris dans le labyrinthe

Imaginons que la souris soit *initialement* dans la pièce 2 !

Quelques questions que l'on peut se poser :

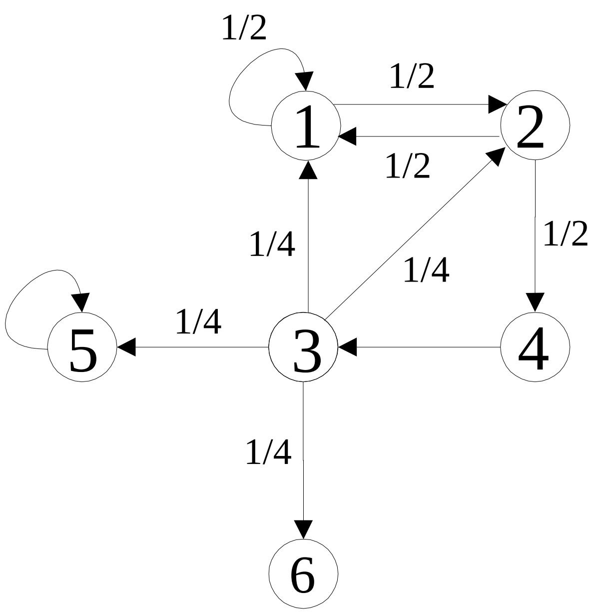
- Quelle est la probabilité qu'elle y soit à nouveau après 4 déplacements ?

- Combien de fois passera-t-elle <u>en moyenne</u> par la pièce 3 avant de sortir ou de tomber définitivement dans la pièce 5 ?

- Quelle est la probabilité que la souris sorte un jour ?

- Combien <u>en moyenne</u> fera-t-elle de déplacements pour revenir dans la pièce 2 ?

Jouons à la souris (1)



Modèle de déplacement de la souris dans le labyrinthe

Imaginons que la souris soit *initialement* dans la pièce 2 !

Quelques questions que l'on peut se poser :

- Quelle est la probabilité qu'elle y soit à nouveau après 4 déplacements ?

$$\pi_2^{(4)} = \frac{3}{16}$$

- Combien de fois passera-t-elle <u>en moyenne</u> par la pièce 3 avant de sortir ou de tomber définitivement dans la pièce 5 ?

$$R_{23} = 2$$

- Quelle est la probabilité que la souris sorte un jour ?

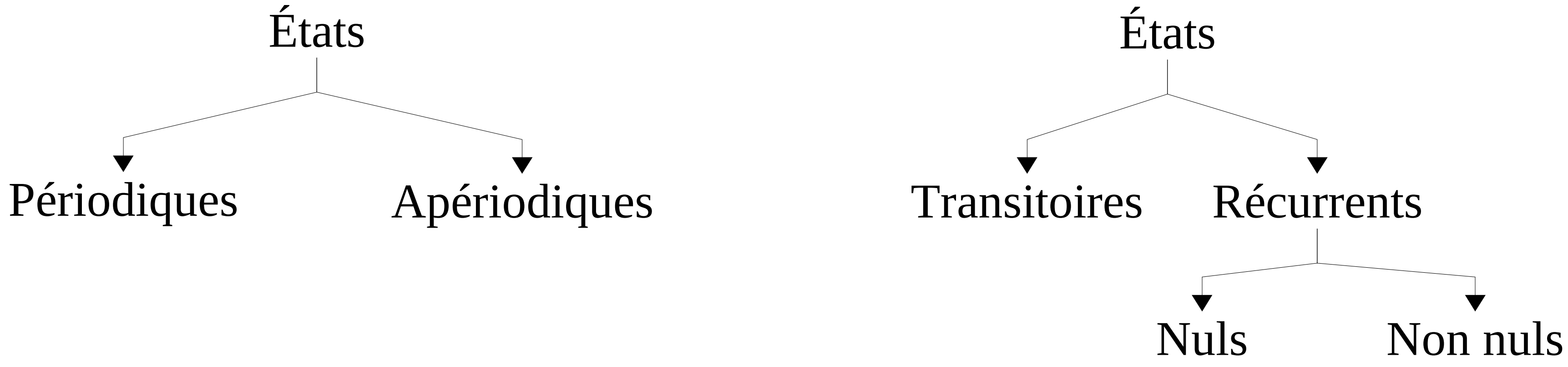
$$f_{26} = \frac{1}{2}$$

- Combien <u>en moyenne</u> fera-t-elle de déplacements pour revenir dans la pièce 2 ?

$$M_2 = \frac{2}{5}$$

Analyse d'une CMTD

- Régime **transitoire**
- Distribution du temps de séjour dans un état
- Classification des états



- Régime **permanent**

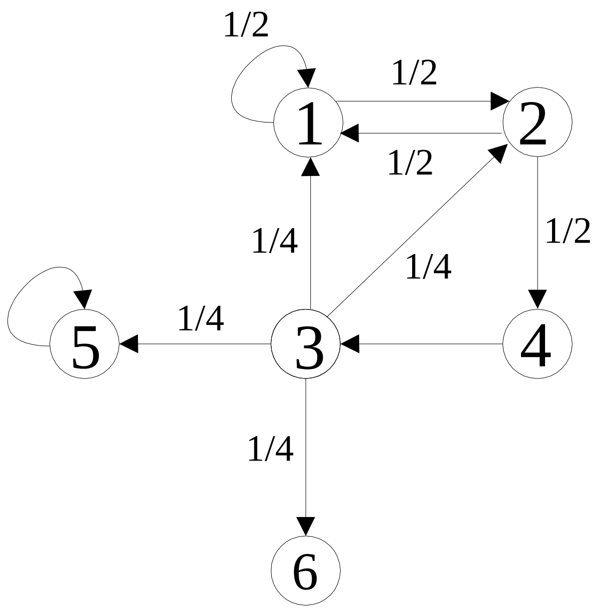
Régime transitoire d'une CMTD

- But : déterminer le vecteur $\pi^{(n)}$ des probabilité d'états $\pi_j^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} P[X_n=j]$ pour que le processus $\{X_n\}_{n\in N}$ se trouve dans l'état j à la n^{ème} étape du processus :

$$\pi^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} [\pi_j^{(n)}]_{j\in E} = [\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \ldots]$$

- Dépend de :
  - La matrice de transition P
  - Le vecteur de probabilités initiales $\pi^{(0)}$

Le départ de la souris (2)



Imaginons que la souris soit *initialement* dans la pièce 2 !

↓

$$\pi^{(0)} = \{0, 1, 0, 0, 0, 0\} \quad soit \quad \begin{Bmatrix} \pi_2^{(0)} = 1 \\ \pi_j^{(0)} = 0, \ \forall j \neq 2 \end{Bmatrix}$$

$$\pi^{(n)} : Etat\ du\ processus\ à\ la\ n^{ième}\ étape\ du\ processus$$

Régime transitoire (...)

- Formule des probabilités totales :

$$\pi_j^{(n)} = P[X_n = j] = \sum_{i \in E} P[X_n = j / X_{n-1} = i] \times P[X_{n-1} = i]$$

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi_i^{(n-1)} \times p_{ij}$$

$$\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} * P$$

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} * P^n$$

Régime transitoire (...)

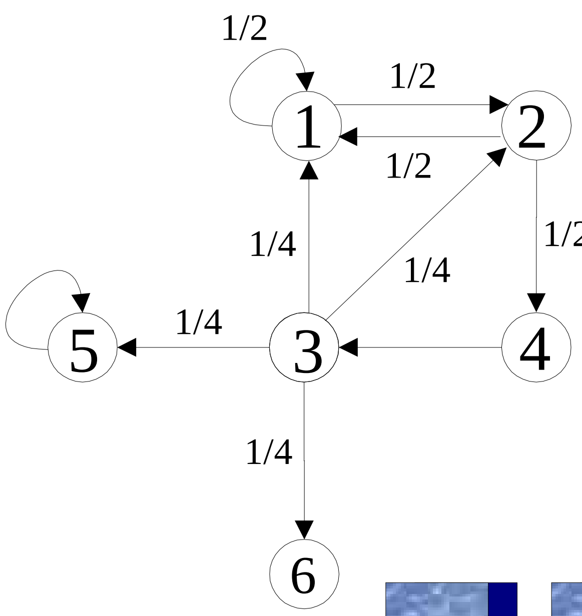
- Formule des probabilités totales :

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi_i^{(n-1)} \times p_{ij}$$

Retour sur notre exemple :

$$\pi_1^{(n)} = \pi_1^{(n-1)} \times p_{11} + \pi_2^{(n-1)} \times p_{21} + \pi_3^{(n-1)} \times p_{31}$$

$$\pi_1^{(n)} = \frac{1}{2}\pi_1^{(n-1)} + \frac{1}{2}\pi_2^{(n-1)} + \frac{1}{4}\pi_3^{(n-1)}$$



Régime transitoire (...)

- Formule des probabilités totales :

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi_i^{(n-1)} \times p_{ij} \qquad\qquad \pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} * P$$

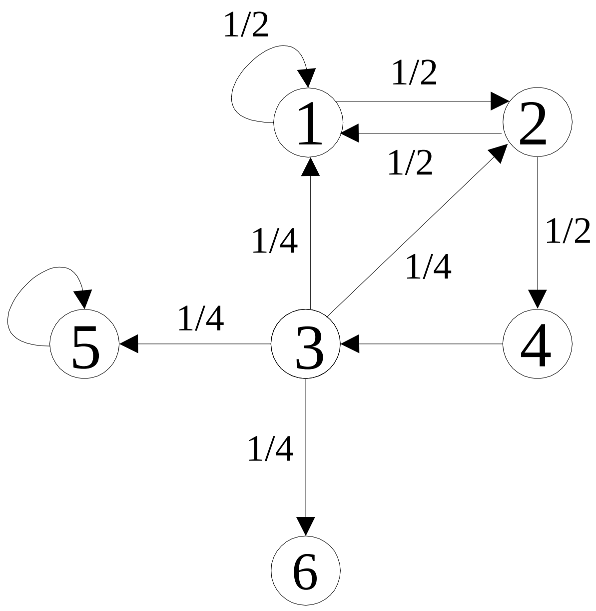
$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} * P^n$$

- Évolution globale du processus X_n :
  - Soit $p_{ij}^{(m)}$ la probabilité de transition de i vers j en m étapes :

$$p_{ij}^{(m)} \stackrel{def}{=} P[X_{n+m}=j \,/\, X_n=i]$$

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m-1)} \cdot p_{kj}$$

Le retour de la souris (3)

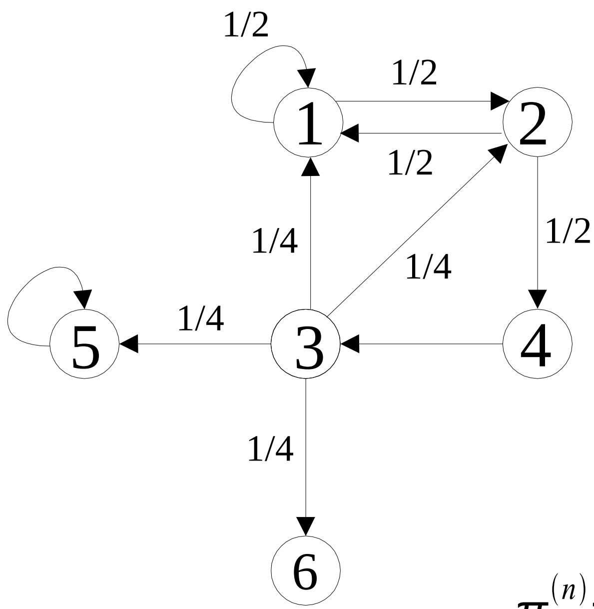


Imaginons que la souris soit *initialement* dans la pièce 2 !

- Quelle est la probabilité qu'elle y soit à nouveau après 4 déplacements ?

$$ie : calcul\ de\ \pi_2^{(4)}\ sachant\ que\ \pi_2^{(0)} = 1$$

Le retour de la souris (3)



Imaginons que la souris soit *initialement* dans la pièce 2 !

- Quelle est la probabilité qu'elle y soit à nouveau après 4 déplacements ?

$$ie : calcul\ de\ \pi_2^{(4)}\ sachant\ que\ \pi_2^{(0)} = 1$$

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} \times P^n$$

$$\ldots$$

$$\pi_j^{(n)} = P[X_n = j] = \sum_{i \in E} P[X_n = j / X_0 = i] \times P[X_0 = i]$$

$$\ldots$$

Temps de séjour

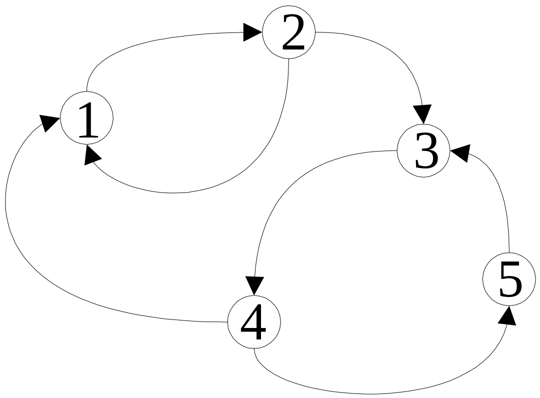
- Distribution du temps de séjour (propriété) :

  Le temps (en nombre d'étapes) passé dans un état d'une chaîne de Markov en temps discret a une distribution géométrique (de paramètre p_{jj}, pour tout état j)

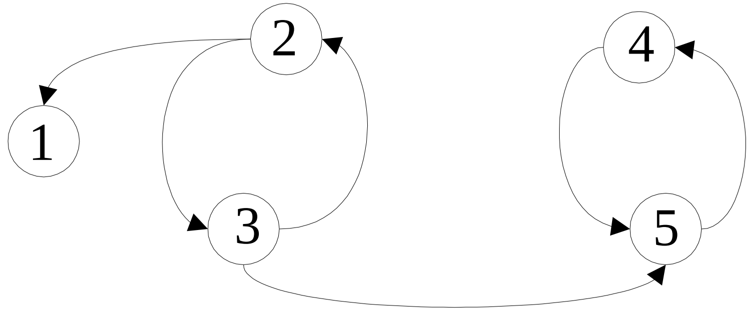
Classification des états d'une CMTD *irréductible*

- **Définition** : une CMTD est dite *irréductible* ssi de tout état i on peut atteindre tout état j (en un nombre fini d'étapes) :

$$\forall i, j \in E, \exists m > 1 \ \ tel\,que \ \ p_{ij}^{(m)} \neq 0$$



- Remarque : tout chaîne non irréductible possède au moins une sous-chaîne absorbante



Classification des états d'une CMTD *périodique*

- **Définition** : un état j est *périodique* si on peut y revenir qu'après un nombre d'étapes multiple de k > 1

$$\exists k > 1 \text{ tel que } p_{ij}^{(m)} = 0 \text{ pour } m \text{ non multiple de } k.$$

- Remarque : la période de l'état j est alors le plus grand entier k vérifiant cette propriété
- **Définition** : la période d'une CMTD est égale au PGCD de la période de chacun de ses états. Une CTMD est dite *périodique* si sa période est supérieure à 1 (et *apériodique* si sa période est égale à 1)
- **Propriété** : la période d'une CMTD est égale au PGCD de la longueur de tous les circuits du graphe associé

Classification des états d'une CMTD *transitoire*

- Soit $f_{jj}^{(n)}$ la probabilité que le premier retour en j ait lieu n étapes après l'avoir quitté.
  - Soit f_{jj}, la probabilité de revenir en j après l'avoir quitté :

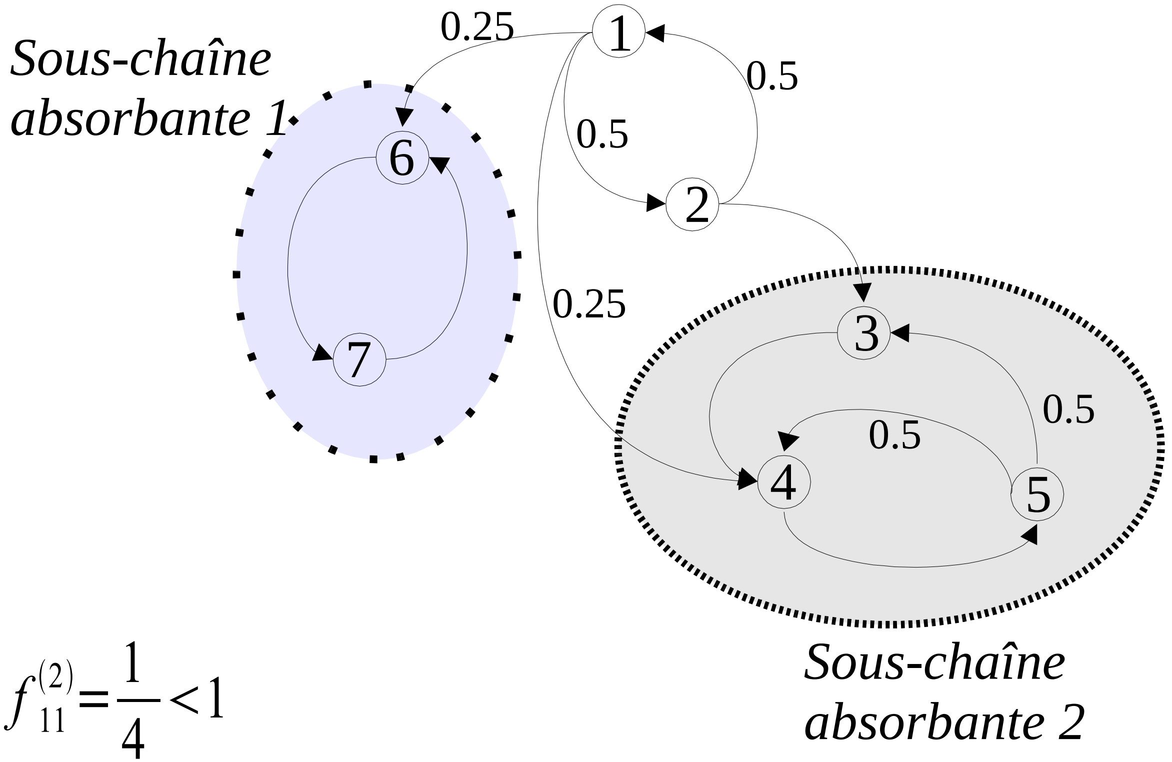
$$f_{jj} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}$$

  - Soit M_j, le *temps* moyen de retour en j : $$M_j \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$$
- **Définition** : un état j est dit :
  - Transitoire si $f_{jj} < 1$
  - Récurrent si $f_{jj} = 1$; de plus il est :
    - Récurrent nul si le temps moyen de retour en infini : $M_j = \infty$
    - Récurrent non nul si le temps moyen de retour est fini : $M_j < \infty$

Classification des états d'une CMTD *transitoire* (...)

- Ergodique = apériodique et récurrent non nul
- **Propriété** : tous les états d'une CMTD irréductible sont tous de même nature
- **Propriété** : tous les états d'une CMTD irréductible finie sont récurrents non nuls.

Classification d'une CMTD (exemple)



Etat 1 : TRANSITOIRE car $f_{11} = f_{11}^{(2)} = \frac{1}{4} < 1$

Etat 6 : RECURRENT NON NUL car $f_{66} = f_{66}^{(2)} = 1 \;\; et\, M_6 = 2 < \infty$

Etat 3 : RECURRENT NON NUL car $f_{33} = 1 \;\; et\, M_3 = 5$

Autres paramètres de performances...

- $f_{ij}^{(n)}$: proba(i → j en exactement n étapes)

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$
$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)}$$

- f_{ij} : proba(i → j en n, quelconque, d'étapes)

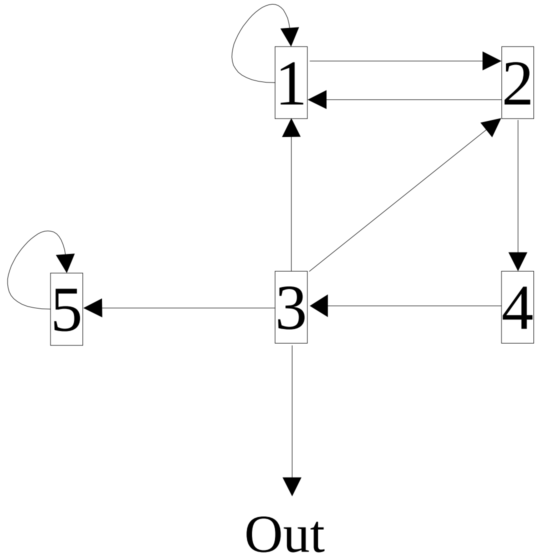
$$f_{ij} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}$$

- Soit R_{ij} le nombre moyen de passages par l'état j sachant que l'on vient de l'état i

$$R_{ij} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n Proba(exactement\ n\ passages\ par\ j / état\ initial = i)$$

$$R_{ij} = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}}$$

La trappe de la souris (4)



Imaginons que la souris soit *initialement* dans la pièce 2 !

- Combien de fois passera-t-elle <u>en moyenne</u> par la pièce 3 avant de sortir ou de tomber définitivement dans la pièce 5 ?

ie : on cherche le nombre moyen de passages en 3 !

$R_{ij} = \text{nb moyen de passages par l'état } j$

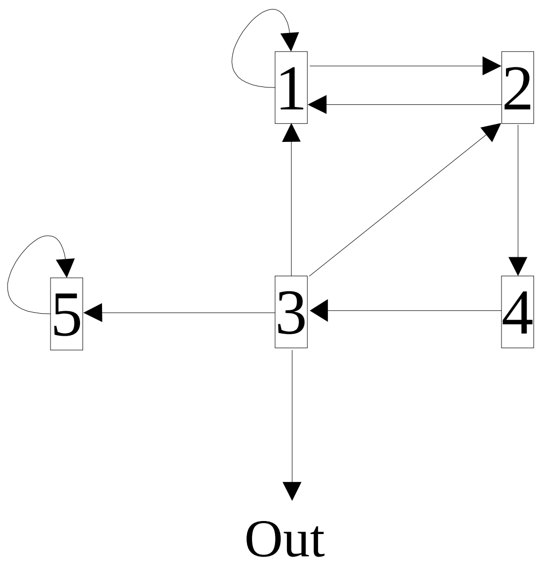
$\text{sachant que l'on vient de l'état } i$

$$\rightarrow R_{23} = \frac{f_{23}}{(1 - f_{33})}$$

$f_{23} = \ldots$

$\ldots$

Sauvons la souris (5)



Imaginons que la souris soit *initialement* dans la pièce 2 !

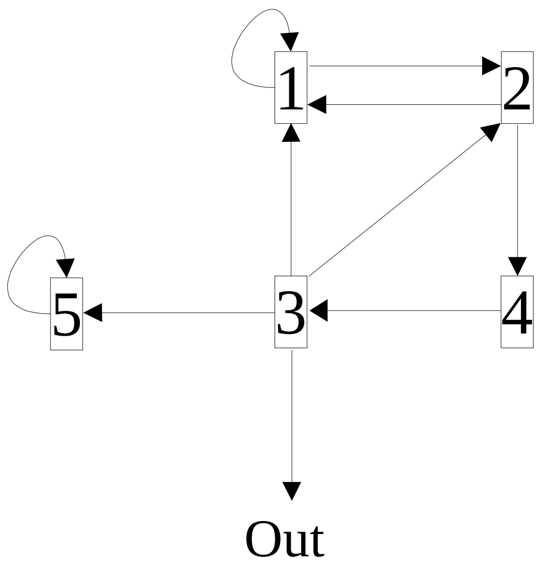
- Quelle est la probabilité que la souris sorte un jour ?

SORTIE = état 6 $\rightarrow$ Calculons f_{26}

$$f_{26} = p_{21} f_{16} + p_{24} f_{46} = \ldots$$

…

La souris tourne en rond (6)



Imaginons que la souris soit *initialement* dans la pièce 2 !

- Combien en moyenne fera-t-elle de déplacements pour revenir dans la pièce 2 ?

Réponse : M_2 = temps moyen de retour en 2 !

Régime permanent

- Étude d'un état *stationnaire* (s'il existe !!!)
- i.e. : on s'intéresse à la limite lorsque n → ∞ du vecteur des probabilités $\pi(n)$
  - Cette limite existe-t'elle ?
  - Comment la calculer (si oui) ?

Comment analyser ?

- Facile ! Il *suffit* d'étudier $\lim_{n\to\infty} [\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^{(n)}]$
- Mais comment faire pour calculer $P^{(n)}$?
  - Diagonalisation de *P* en : $P = U^{-1} \cdot D \cdot U$ où D est la matrice des valeurs propres, U base (inversible)
  - D'où : $P^n = U^{-1} \cdot D^n \cdot U$
  - L'existence du régime stationnaire se résume à l'existence et au calcul éventuel de :

$$\lim_{n\to\infty} \pi^{(0)} U^{-1} \cdot D^n \cdot U$$

Comment analyser (plus simple)

- Intuitivement, on a envie de dire :
  régime permanent ⇒ $\pi^{n} = \pi^{n+1}$
  Donc, il faut résoudre $\pi = \pi P$
- Mais quelles sont les conditions pour que ça marche ?
  - Chaîne irréductible
  - CMTD apériodique
  - États récurrents non nuls

Régime permanent : Propriété

- Dans une CMTD irréductible et apériodique le vecteur π des probabilités limites $\pi = \lim_{n\to\infty} \pi^{(n)}$ existe toujours et est indépendant de la distribution des probabilités initiales $\pi^{(0)}$
  - Soit tous les états sont transitoires ou récurrents nuls et $\pi_j=0$ pour tout $j \in E$
  - Soit tous les états sont récurrents non nuls et les π_j sont solutions du système :

$$\pi_j = \sum_{i\in E} \pi_i p_{ij}, \quad \forall\, j \in E$$
$$\sum_{i\in E} \pi_i = 1$$

Quelques remarques

- $$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}, \quad \forall j \in E \iff \pi = \pi P$$

- $$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} \iff \sum_{i \in E} \pi_j p_{ji} = \sum_{j \in E} \pi_i p_{ij} \quad car \sum_{i \in E} p_{ji} = 1$$
  - $\pi_j p_{ji}$ = nb moyen de transitions de j vers i par unité de temps, donc la somme (Σ) est le flux moyen de sortie de l'état j
  - Idem pour $\pi_i p_{ij}$ qui le flux moyen d'entrée dans l'état j
  - Donc en régime permanent, on peut écrire :

    Pour tout état j, flux sortant de j = flux entrant dans j

- Si les probabilités stationnaires existent, alors : $\pi_i = \dfrac{1}{M_i}$

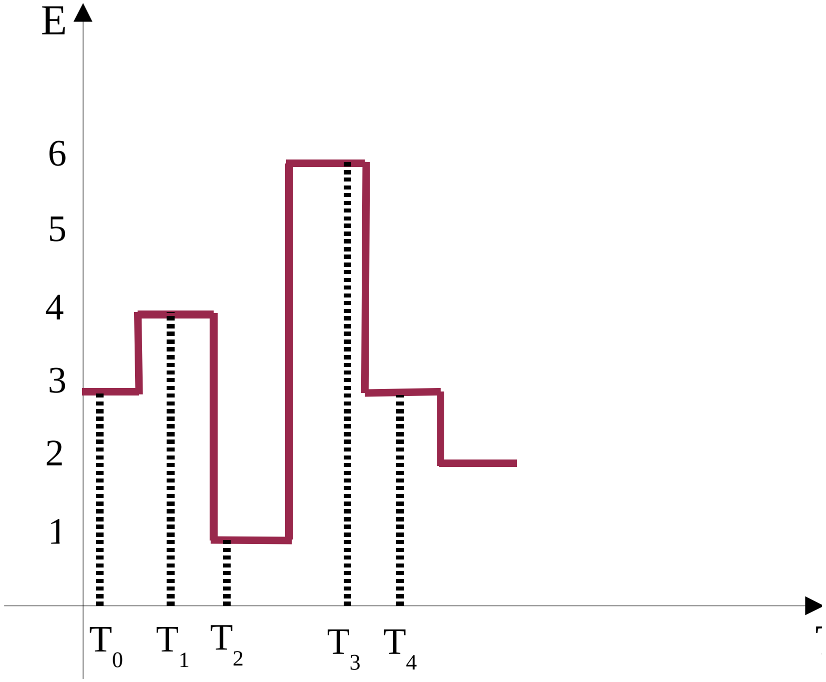
Agenda

- Pré-requis
- Chaînes de Markov à temps discret
- **.... et à temps continu**
- Processus de Naissance et de Mort

La version continue des Chaînes de Markov

Soit un processus stochastique $\{X_n\}_{n \in N}$ à temps **continu** et espace d'états discret...

E peut-être fini ou infini (mais dénombrable)



*Processus stochastique à espace d'états discrets et temps **continu***

Définition de $\{X_t\}_{t \geqslant 0}$

- *Définition*

$\{X_t\}_{t \geqslant 0}$ est une CMTC ssi :

$$P[X(t_n)=j \,/\, X(t_{n-1})=i_{n-1}, X(t_{n-2})=i_{n-2}, \ldots , X(t_0)=i_0] = P[X(t_n)=j \,/\, X(t_{n-1})=i_{n-1}]$$

i.e. C'est un processus sans mémoire !

- *Restriction*

On ne considère que les CMTC *homogène,* c'est-à-dire celles dont les probabilités p_{ij} sont indépendantes des instants d'observations, soit :

$$p_{ij}(t) \stackrel{\text{def}}{=} P[X(t+s) = j \,/\, X(s)=i] \quad \forall\, s \geqslant 0$$

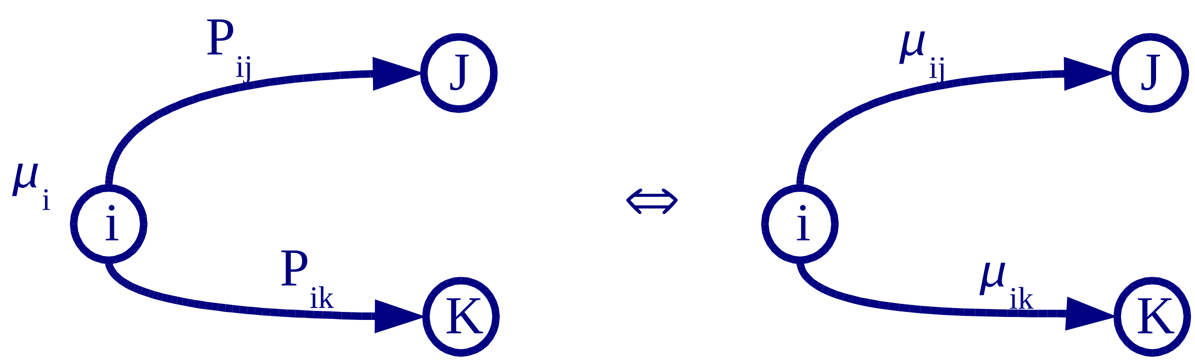
Caractérisations d'une CMTC

- Une CMTC est un processus stochastique à espace d'états discret et à temps continu tel que :
  - Le temps passé dans un état i a une distribution exponentielle de taux μ_i
  - Les transitions d'un état i vers les autres états sont probabilistes

$$\mu_i = \mu_{ij} + \mu_{ik}$$

$$p_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\mu_{ij} + \mu_{ik}}$$

$$p_{ij} = \frac{\mu_{ik}}{\mu_{ij} + \mu_{ik}}$$



$$\mu_{ij} = \mu_i\, p_{ij}$$

$$\mu_{ik} = \mu_i\, p_{ik}$$

Analyse des CMTC's

- A une CMTC, on associe une matrice Q, appelée *générateur infinitésimal* tel que :

$$Q = \begin{pmatrix} -\sum_{j\neq 1} \mu_{1j} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1j} & \cdots \\ \mu_{21} & -\sum_{j\neq 2} \mu_{2j} & \cdots & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \mu_{i1} & & & \mu_{ij} & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Régime transitoire

- Consiste à déterminer le vecteur π(t) des probabilités d'état : $\pi(t) \equiv P[X(t)=j], j \in E$ à tout instant du processus :

$$\pi(t) \equiv [\pi_j(t)]_{j \in E} = [\pi_1(t), \pi_1(t), \ldots]$$

- De la même façon que pour une CMTD, ce vecteur des probabilités dépend :
  - Du générateur infinitésimal Q
  - Du vecteur des probabilités d'états initiales π(0)
- On montre que :

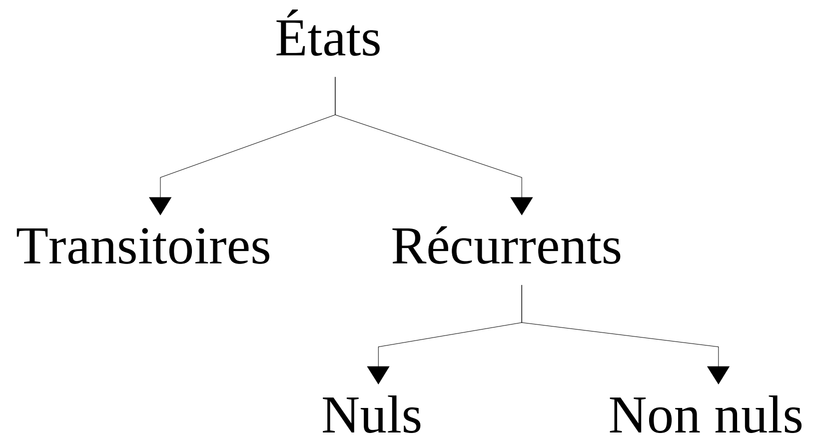
$$\pi(t) = \pi(0) e^{Qt}$$

$$avec\; e^{Qt} \equiv Id + Qt + \frac{(Qt)^2}{2}! + \cdots$$

Analyse du régime permanent d'une CMTC

- Comme dans le cas discret :
  - $\lim_{n \to \infty} \pi(t)$ Existe-t'elle ?
  - Si elle existe, peut-on la calculer ?
- Rappel : pour un CMTD, la condition est d'être irréductible et apériodique !
  - Periodicité d'une CMTC ?...

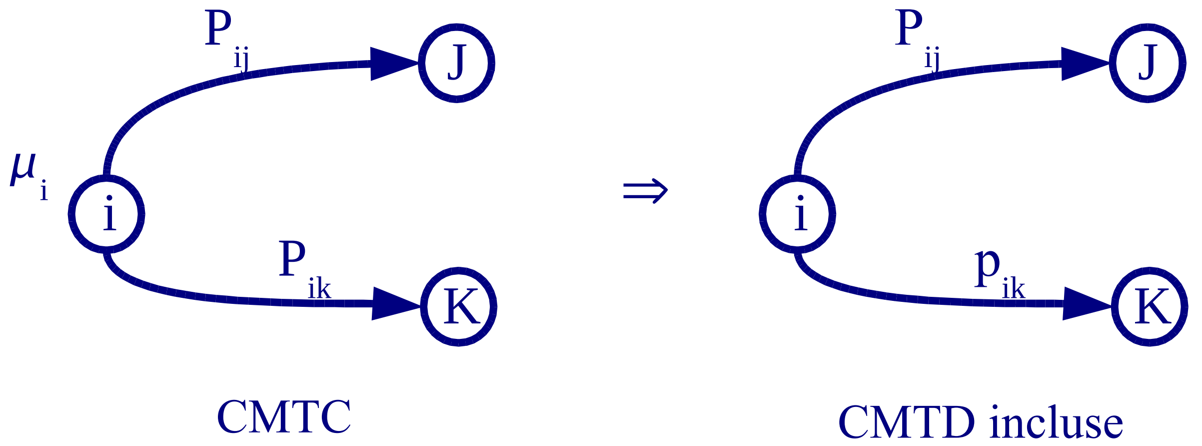
Classification des états



- Si la CMTC est irréductible alors tous les états sont de même nature
  - ➔ Lien *fort* entre CMTC et CMTD ⇒ notion de **CMTD incluse**

CMTD incluse

- **Définition** : La CMTD incluse dans la CMTC de générateur infinitésimal Q, avec les éléments $q_{ij} = \mu_i p_{ij}$ $(i \neq j)$, est une chaîne de Markov à temps discret dont la matrice de transitions a pour éléments les p_{ij}.



$$Avec : \ \pi_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\mu_i} = \frac{\mu_{ij}}{\sum_{k \neq i} \mu_{ik}}$$

Conséquences de la chaîne incluse

- **Propriétés** : une CMTC est irréductible ssi la CMTD incluse est irréductible.
  - $i \in$ CMTC est transitoire $\Leftrightarrow$ $i \in$ CMTD incluse est transitoire
  - $i \in$ CMTC est récurrent $\Leftrightarrow$ $i \in$ CMTD incluse est récurrent

- **Propriété** : Tous les états d'un CMTC irréductible sont de même nature :
  - Soit tous transitoires,
  - Soit tous récurrents nuls,
  - Soit tous récurrents non nuls.

  Si, de plus, E est fini, tous les états sont récurrents non nuls

Existence des probabilités stationnaires

- **Propriété** : Dans une CMTC irréductible, le vecteur π des probabilités limites $\pi_j = \lim_{t\to\infty} \pi_j(t)$ existe toujours et est indépendant de la distribution des probabilités initiales $\pi(0)$.
  - Soit tous les états sont transitoires ou récurrents non nuls et $\pi_j=0$ pour tout $j \in E$
  - Soit tous les états sont récurrents non nuls et les π_j sont l'unique solution du système :

$$\sum_{i\in E} \pi_i q_{ij} = 0, \quad \forall\, j \in E$$
$$\sum_{i\in E} \pi_i = 1$$

Quelques remarques

$$\sum_{i\in E}\pi_i q_{ij}=0,\ \forall\ j\in E\ \Leftrightarrow\ \pi Q=0$$

$$\sum_{i\in E}\pi_i q_{ij}=0\ \Leftrightarrow \sum_{i\neq j}\pi_i q_{ij}+\pi_j q_{jj}=0$$

$$\text{or } q_{ij}=\mu_{ij}\ et\ q_{jj}=-\sum_{i\neq j}\mu_{ji}$$

$$Donc\ \sum_{i\neq j}\pi_i \mu_{ij}=\sum_{i\neq j}\pi_j \mu_{ji}$$

Dernière équation = *équation d'état* traduisant l'équilibre entre le flux entrant dans l'état j et le flux sortant de l'état j, i.e.

Pour tout état j, flux sortant de j = flux entrant dans j

Résolution numérique des CMTC

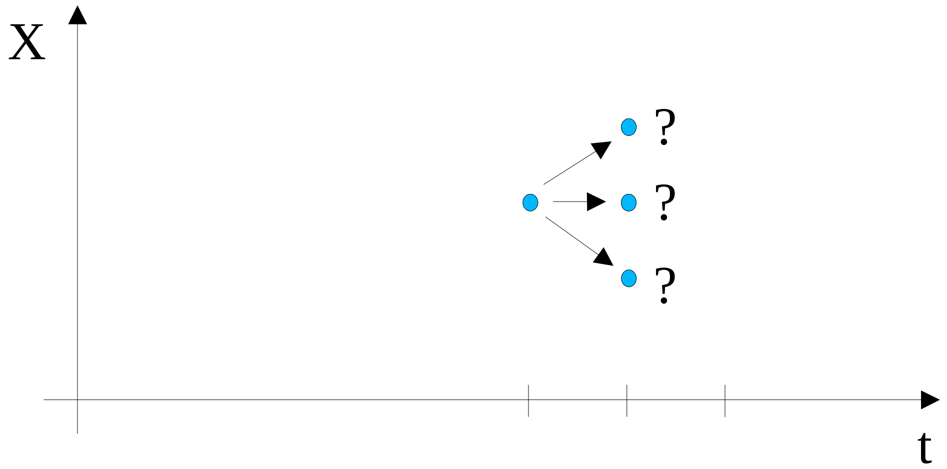
- Utilisation de méthodes itératives
- Gauss-Seidel, Jacobi, méthode de relaxation SOR/SSOR
- Outils :
  - PRISM (Probabilistic Symbolic Model Checker) :
    http://www.cs.bham.ac.uk/~dxp/prism/
  - MathLab
  - Mobius (Model-based environment ofr Validation of System, Reliability, Availablity, Security and Performance)
    http://www.mobius.uiuc.edu/

Agenda

- Pré-requis
- Chaînes de Markov à temps discret
- .... et à temps continu
- **Processus de Naissance et de Mort**

Processus de Naissance et de Mort

- Cas particulier des processus Markoviens tels que $\{X_n=i\}$
  - Stable => $X_{n+1} = i$
  - Mort => $X_{n+1} = i-1$
  - Naissance => $X_{n+1} = i+1$

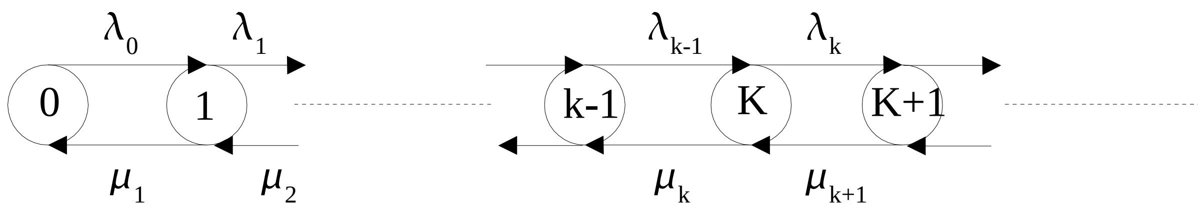


Processus de Naissance et de Mort (temps continu)

- Dans un état E_k et dans un *petit* intervalle de temps Δt seuls deux événements peuvent se produire :
  - Naissance : probabilité = $\lambda_k \cdot \Delta t$
  - Mort (si k>0) : probabilité = $\mu_k \cdot \Delta t$
  - ... et rien se produire avec une proba = $(1-(\lambda_k+\mu_k))\cdot \Delta t$
- La matrice des taux de transition est définie par :
  - $$q_{kk}=(\lambda_k+\mu_k)$$
    $$q_{kk+1}=\lambda_k$$
    $$q_{kk-1}=\mu_k \;\; pour\; k>0$$
    $$q_{kj}=0 \;\; sinon$$

État stationnaire d'un processus de naissance et de mort (1)

- Représentation graphique de la chaîne de Markov



- Équations d'états d'équilibre :

$\boxed{\textit{Pour tout état } j, \textit{ flux sortant de } j = \textit{flux entrant dans } j}$

$$\mu_1 \, p(1) = \lambda_0 \, p(0)$$

$$(\lambda_k + \mu_k)\, p(k) = \lambda_{k-1}\, p(k-1) + \mu_{k+1}\, p(k+1), \; pour \; k > 1$$

$$\vdots$$

$$soit \;\; p(k+1) = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}\, p(k)$$

$$donc \;\; p(k) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\, p(0)$$

État stationnaire d'un processus de naissance et de mort (2)

- Condition de stabilité (ergodicité)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} < \infty$$

- Une condition suffisante : à partir d'un certain état le rapport naissance / mort reste inférieur à un seuil < 1

$$\exists\ \rho < 1,\ \ k_{0,}\ \ tels\, que\ \ k > k_0\ \Rightarrow \frac{\lambda_i}{\mu_i} \leqslant \rho$$

- La formule générale :

$$p(k) = \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}{\displaystyle 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

Processus de naissance et de mort célèbres...

- Processus de Naissance Pure :
  - Pas de mort : $\mu_k=0$
  - Taux de naissance indépendant de la population : $\lambda_k=\lambda$
  - Il s'agit de... la loi de Poisson défini par : $p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$
- Processus de Mort Pure :
  - Pas de naissance : $\lambda_k=0$
  - Taux de mortalité indépendant de la population : $\mu_k=\mu$
  - Il s'agit de... la loi exponentielle : $p_k(t)=e^{-\mu t}$